Variables Aleaoitres Discrete II

A.Belcaid

ENSA-Safi

April 24, 2022

Variance

- Soit X une Variable Aléatoire (VA) avec une espérance $\mu = \mathbf{E}[X]$.

Variance

- Soit X une Variable Aléatoire (VA) avec une espérance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On considère alors la VA $X - \mu$.

Variance

- Soit X une Variable Aléatoire (VA) avec une espérance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On considère alors la VA $X - \mu$.
- Quelle sera l'**espérance** de $X - \mu$.

Variance

- Soit X une Variable Aléatoire (VA) avec une espérance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On considère alors la VA $X - \mu$.
- Quelle sera l'**espérance** de $X - \mu$.

Variance

- Soit X une Variable Aléatoire (VA) avec une espérance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On considère alors la VA $X - \mu$.
- Quelle sera l'**espérance** de $X - \mu$.

Variance

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}[\ (X - \mu)^2\ ]$$

- On peut la calculer en utilisant l'espérance d'une fonction d'une VA.

$$\text{var}(X) = \sum_{x} \mathbf{P}_X(x)\ (x - \mu)^2$$

Variance

- Soit X une Variable Aléatoire (VA) avec une espérance $\mu = \mathbf{E}[X]$.
- On considère alors la VA $X - \mu$.
- Quelle sera l'**espérance** de $X - \mu$.

Variance

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}[\ (X - \mu)^2\ ]$$

- On peut la calculer en utilisant l'espérance d'une fonction d'une VA.

$$\text{var}(X) = \sum_x \mathbf{P}_X(x)\ (x - \mu)^2$$

- Une autre entité reliée a la **variance** est:

Ecart type

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}\ (X)}$$

Propriétés Variance

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.
- Soit $Y = X = b$, calculer

$$\text{var}\,(Y) =$$

Propriétés Variance

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.
- Soit $Y = X = b$, calculer

$$\text{var}\,(Y) =$$

- On note $Y = aX$, calculer

$$\text{var}\,(Y) =$$

Propriétés Variance

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.
- Soit $Y = X = b$, calculer

$$\mathrm{var}\left(Y\right) =$$

$$\boxed{\mathrm{var}((aX + b) = a^2 \mathrm{var}\left(X\right)}$$

- On note $Y = aX$, calculer

$$\mathrm{var}\left(Y\right) =$$

Propriétés Variance

- On note $\mu = \mathbf{E}(X)$.
- Soit $Y = X = b$, calculer

$$\text{var}\left(Y\right) =$$

$$\text{var}((aX + b) = a^2\text{var}\left(X\right)$$

- On note $Y = aX$, calculer

$$\text{var}\left(Y\right) =$$

On peut en déduire une formule utile pour le calcul de variance:

Formule utile

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \left(\mathbf{E}[X]^2\right)$$

Variance d'une Bernoulli

on considère un VA qui suit une loi **Bernoulli**.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{avec prob } p \\ 0, & \text{avec prob } 1 - p \end{cases}$$

on considère un VA qui suit une loi **Bernoulli**.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{avec prob } p \\ 0, & \text{avec prob } 1 - p \end{cases}$$

- Calculer la **Variance** de X avec formule normale:

$$\text{var}(X) = \sum_x (x - \mathbf{E}[X])^2 \mathbf{P}_X(x)$$

- Calculer la **Variance** de X en utilisant la deuxième formule:

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}[X])^2$$

Variance Loi Uniforme

$$
\begin{aligned}
\text{var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\right) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+2)}{12}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\right) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n(n+2)}{12} \end{aligned}$$

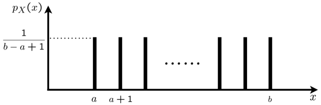
- Pour le cas général entre $[a, b]$. on pose $n = b - a$.

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\right) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+2)}{12}
\end{aligned}$$

- Pour le cas général entre $[a, b]$. on pose $n = b - a$.

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2)$$

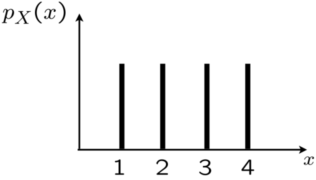


Conditionnement sur un évènement

- On considère un évènement A et on utilise la loi de probabilité conditionnée sur A.

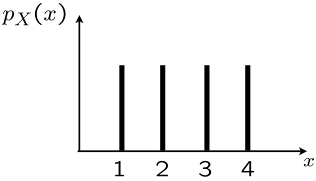
Loi Classique	**Loi conditionnée**
$\mathbf{P}_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$	$\mathbf{P}_{X\|A}(x) = \mathbf{P}_X(X = x \mid A)$
$\sum_x \mathbf{P}_X(x) = 1$	$\sum_x \mathbf{P}_{X\|A}(x) = 1$
$\mathbf{E}[X] = \sum_x x \cdot \mathbf{P}_X(x)$	$\mathbf{E}[X\|A] = \sum_x x \cdot \mathbf{P}_{X\|A}(x)$
$\mathbf{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot \mathbf{P}_X(x)$	$\mathbf{E}[g(X)\|A] = \sum_x g(x) \cdot \mathbf{P}_{X\|A}(x)$

Exemples



$$\mathbf{E}[X] =$$

$$\mathrm{var}(X) =$$

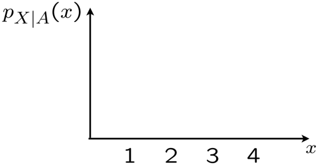


$$\mathbf{E}[X] =$$

$$\text{var}(X) =$$

.

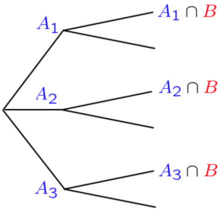
- On considère alors l'évènement $A = X \geqslant 2$



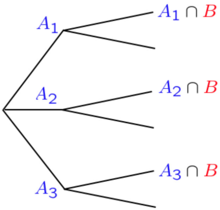
$$\mathbf{E}[X \mid A] =$$

$$\text{var}(X \mid A) =$$

Théorème d'espérance totale



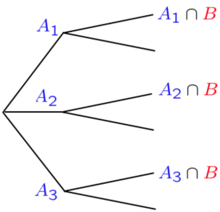
Théorème d'espérance totale



$$P(B) = P_X(A_1)P_X(B|A_1) + \ldots + P_X(A_n)P_X(B|A_n)$$

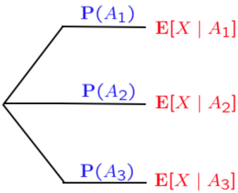
$$P(x) = P_X(A_1)P_{X|A}(x) + \ldots + P_X(A_n)P_{X|A_n}(x)$$

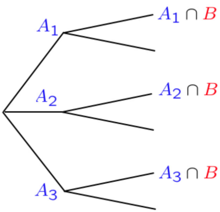
Théorème d'espérance totale



$$P(B) = P_X(A_1)P_X(B|A_1) + \ldots + P_X(A_n)P_X(B|A_n)$$

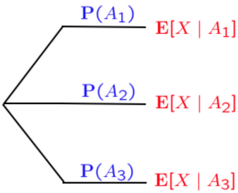
$$P(x) = P_X(A_1)P_{X|A}(x) + \ldots + P_X(A_n)P_{X|A_n}(x)$$





$$P(B) = P_X(A_1)P_X(B|A_1) + \ldots + P_X(A_n)P_X(B|A_n)$$

$$P(x) = P_X(A_1)P_{X|A}(x) + \ldots + P_X(A_n)P_{X|A_n}(x)$$



Espérance totale

$$\mathbf{E}[X|A] = \sum_{i}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{E}[X|A_i]$$

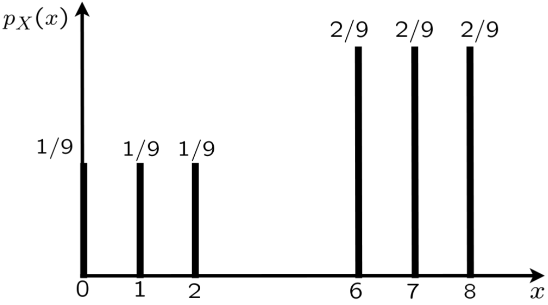


Figure: Calculer l'espérance de cette variable

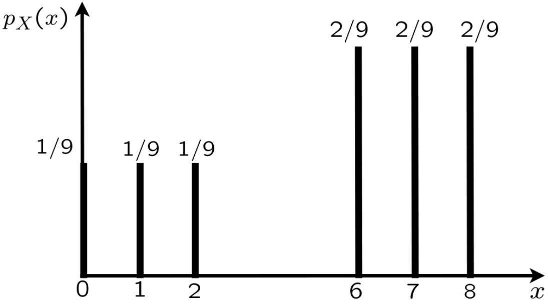


Figure: Calculer l'espérance de cette variable

- $X : \mathbf{P}_X(x)$.
- $Y : \mathbf{P}_Y(y)$.

- $X : \mathbf{P}_X(x)$.
- $Y : \mathbf{P}_Y(y)$.

Question

$\mathbf{P}(X = Y)$?

Couple de variables aléatoires

- $X : \mathbf{P}_X(x)$.
- $Y : \mathbf{P}_Y(y)$.

Question

$\mathbf{P}(X = Y)$?

Loi de couple de VA

$$\mathbf{P}_{XY}(x, y) = \mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y)$$

- $X : \mathbf{P}_X(x)$.
- $Y : \mathbf{P}_Y(y)$.

Question

$\mathbf{P}(X = Y)$?

Loi de couple de VA

$$\mathbf{P}_{XY}(x, y) = \mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y)$$

y					
4	1/20	2/20	2/20		
3	2/20	4/20	1/20	2/20	
2		1/20	3/20	1/20	
1		1/20			
	1	2	3	4	x

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{XY}(1, 3) &= ? \\ \mathbf{P}_X(3) &= ? \\ \mathbf{P}_Y(2) &= ? \end{aligned}$$

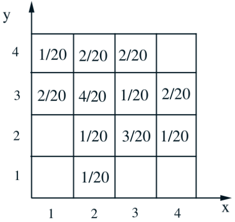
- $X : \mathbf{P}_X(x)$.
- $Y : \mathbf{P}_Y(y)$.

Question

$\mathbf{P}(X = Y)$?

Loi de couple de VA

$$\mathbf{P}_{XY}(x, y) = \mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y)$$



$$\begin{aligned}
\sum_x \sum_y \mathbf{P}_{XY}(x, y) &= 1 \\
\mathbf{P}_X(x) &= \sum_y \mathbf{P}_{X,Y}(x, y) \\
\mathbf{P}_Y(y) &= \sum_x \mathbf{P}_{X,Y}(x, y)
\end{aligned}$$

Espérance d'une fonction de couple

- On considère deux VA X et Y.
- Soit $Z = g(X, Y)$ une VA qui dépend de X et Y.
- La loi de Z est donnée par:

$$\mathbf{P}_Z(z) = \mathbf{P}(Z = z) = \mathbf{P}(g(X, Y) = z)$$

- Aussi l' **espérance** de Z est:

$$\mathbf{E}[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y)\mathbf{P}_{XY}(x, y)$$

Espérance de la somme

- On sait deja que :

$$\mathbf{E}[aX + b] = a\,\mathbf{E}[X] + b$$

- On sait deja que :

$$\mathbf{E}[aX + b] = a\,\mathbf{E}[X] + b$$

- Maintenant on doit prouver le théorème

$$\boxed{\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]}$$

- **Indice**: Poser $g(X, Y) = X + Y$.

- On sait deja que :

$$\mathbf{E}[aX + b] = a\ \mathbf{E}[X] + b$$

- Maintenant on doit prouver le théorème

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

- **Indice**: Poser $g(X, Y) = X + Y$.

$$\mathbf{E}[X + \ldots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \ldots + \mathbf{E}[X_n]$$

Espérance d'une binomiale

- Soit X une binomiale avec paramètres $\mathbf{p}$ et $\mathbf{n}$.
    - Le nombre de succès pour n Bernoulli.

Espérance d'une binomiale

- Soit X une binomiale avec paramètres $\mathbf{p}$ et $\mathbf{n}$.
  - Le nombre de succès pour n Bernoulli.

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

Espérance d'une binomiale

- Soit X une binomiale avec paramètres $\mathbf{p}$ et $\mathbf{n}$.
  - Le nombre de succès pour n Bernoulli.
- on pose la **variable indicatrice**

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{essai i est réussi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Espérance d'une binomiale

- Soit X une binomiale avec paramètres $\mathbf{p}$ et $\mathbf{n}$.
  - Le nombre de succès pour n Bernoulli.
- on pose la **variable indicatrice**

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{essai } i \text{ est réussi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

-

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Espérance d'une binomiale

- Soit X une binomiale avec paramètres $\mathbf{p}$ et $\mathbf{n}$.
  - Le nombre de succès pour n Bernoulli.
- on pose la **variable indicatrice**

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{essai } i \text{ est réussi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

-

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = np}$$