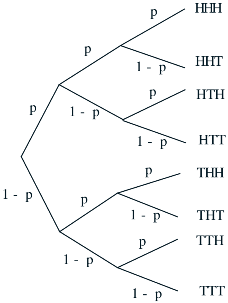
Independence

A.Belcaid

ENSA-Safi

March 17, 2022

- Lancé d'un dé **truqué** avec $\mathbf{P}(\mathrm{H}) = p$ et $\mathbf{P}(\mathrm{T}) = 1 - p$.



- Règle de multiplication:

$$\mathbf{P}(\mathrm{THT}) =$$

- Loi de probabilité totale:

$$\mathbf{P}(\text{Un seul H}) =$$

- Règle de Bayes

$$\mathbf{P}(\text{premier lancé est H} \mid \text{ 1 seul H}) =$$

Indépendance de deux évènements

Indépendance de deux évènements

Indépendance de deux évènements

- **Définition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.

Indépendance de deux évènements

- **Définition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne aucune information sur B.

- **Définition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne aucune information sur B.

Indépendance de deux évènements

- **Définition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne aucune information sur B.

Definition

Deux évènements A et B sont **indépendants**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- **Définition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne aucune information sur B.

Definition

Deux évènements A et B sont **indépendants**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

  - Symétrique par rapport a A et B.

- **Définition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne aucune information sur B.

Definition

Deux évènements A et B sont **indépendants**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Symétrique par rapport a A et B.
- Implique directement que $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.

- **Définition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne aucune information sur B.

Definition

Deux évènements A et B sont **indépendants**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Symétrique par rapport a A et B.
- Implique directement que $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
- S'applique même si $P(A) = 0$.

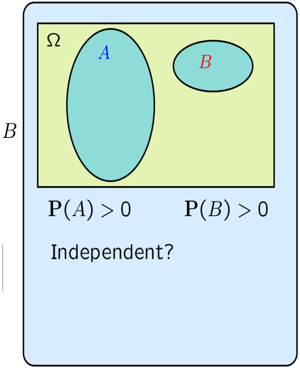
- **Définition intuitive**: $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
  - L'occurence de A nous donne aucune information sur B.

Definition

Deux évènements A et B sont **indépendants**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Symétrique par rapport a A et B.
- Implique directement que $\mathbf{P}(B|A) = P(B)$.
- S'applique même si $P(A) = 0$.



Exemple 1

On possède une pièce de monnaie truquée qu'on lance deux fois. Dans le premier lancé on peut obtenir soit H soit T avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Cependant le deuxieme lance donne toujours le résultat du lancé 1. Ainsi les deux résultats possibles sont $\{\mathrm{HH}, \mathrm{TT}\}$.

- Est que l'évènement $A = \{$H dans le premier lancé$\}$ et $\mathrm{B} = \{$H dans le deuxieme lance$\}$ sont indépendants?

Exemple 1

On possède une pièce de monnaie truquée qu'on lance deux fois. Dans le premier lancé on peut obtenir soit H soit T avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Cependant le deuxieme lance donne toujours le résultat du lancé 1. Ainsi les deux résultats possibles sont $\{\mathrm{HH}, \mathrm{TT}\}$.

- Est que l'évènement $A = \{\text{H dans le premier lancé}\}$ et $\mathrm{B} = \{\text{H dans le deuxieme lance}\}$ sont indépendants?

Exemple 2

Soit A un évènement de l'espace d'états Ω.

- Est que A et Ω sont indépendants?

Définition

Deux évènements A et B sont **indépendants**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants?

Définition

Deux évènements A et B sont **indépendants**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants?

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
P(A) &= P(A).P(B) + P(A \cap B^c) \\
P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A).P(B) \\
P(A \cap B^c) &= P(A).(1 - P(B)) \\
P(A \cap B^c) &= P(A).P(B^c)
\end{aligned}$$

Définition

Deux évènements A et B sont **indépendants**

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$$

- Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants?

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
P(A) &= P(A).P(B) + P(A \cap B^c) \\
P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A).P(B) \\
P(A \cap B^c) &= P(A).(1 - P(B)) \\
P(A \cap B^c) &= P(A).P(B^c)
\end{aligned}$$

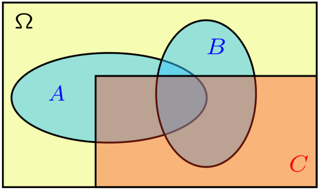
Mini exercice

On suppose que A et B sont indépendants. Est que A^c et B^c sont indépendant?

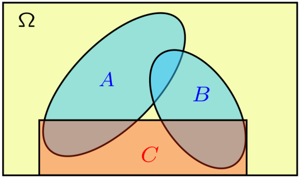
Définition

L'indépendance **conditionnelle** est définie en utilisant les probabilités conditionnelles étant donné $P(. \mid C)$.

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C).P(B \mid C)$$



- On suppose que A et B sont indépendants.



- Si C est réalisé, a t on toujours l'indépendance?

Independence plusieurs évènements

- **Définition Intuitive**: L'information sur quelque évènements ne change par les probabilités des autres évènements.

- **Définition Intuitive**: L'information sur quelque évènements ne change par les probabilités des autres évènements.

Définition

Plusieurs Évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits **indépendants** si:

$$P(A_i \cap A_j \cap \ldots A_m) = P(A_i)P(A_j)\ldots P(A_m).$$

pour tous les indices distincts $i, j, \ldots, m$

- **Définition Intuitive**: L'information sur quelque évènements ne change par les probabilités des autres évènements.

Définition

Plusieurs Évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits **indépendants** si:

$$P(A_i \cap A_j \cap \ldots A_m) = P(A_i)P(A_j)\ldots P(A_m).$$

pour tous les indices distincts $i, j, \ldots, m$

- $n = 3$?:

$$\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) & = & P(A_1).P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) & = & P(A_1).P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) & = & P(A_2).P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_2 \cap A_3) & = & P(A_1).P(A_2).P(A_3) \end{cases}$$

Indépendance et indépendance deux a deux

- Lance deux pieces de monnaie:
  - H_1: premier lance est H.
  - H_2: deuxième lance est H.

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

Indépendance et indépendance deux a deux

- Lance deux pieces de monnaie:
  - H_1: premier lance est H.
  - H_2: deuxième lance est H.

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

HH	HT
TH	TT

- $\mathbf{C}$: Les deux lancés produisent le même résultat.

- Lance deux pieces de monnaie:
  - H_1: premier lance est H.
  - H_2: deuxième lance est H.

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

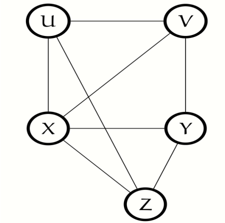
HH	HT
TH	TT

- $\mathbf{C}$: Les deux lancés produisent le même résultat.

- Est que H_1, H_2 et H_3 sont indépendants **deux a deux**?
- Est qu'il sont indépendants?

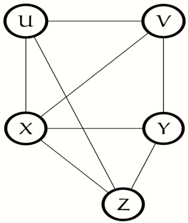
Présentation

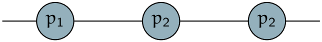
Problème ou on connecte des entités par des liens qui possèdent une probabilité p_i de fonctionner (**Up**).



Présentation

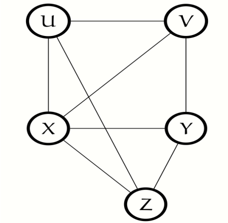
Problème ou on connecte des entités par des liens qui possèdent une probabilité p_i de fonctionner (**Up**).

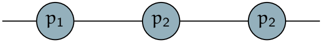


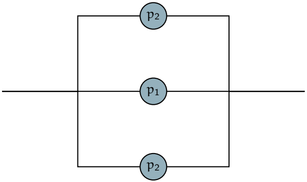


Présentation

Problème ou on connecte des entités par des liens qui possèdent une probabilité p_i de fonctionner (**Up**).







Probleme

Un roi vient d'une famille de deux enfants.

- Quelle est la probabilite qu'il as un seour.