# Conditionnements

**A.Belcaid**

ENSA-Safi

February 24, 2022

1 Conditionnement

Les **probabilités conditionnelles** nous permet de raisonner dans des conditions avec des **informations partielles**.

1. Dans une expérience avec plusieurs lancés de dé, On vous dit que la somme des lancés est $\mathbf{9}$. Quelle est la probabilité que le premier lancé est un $\mathbf{6}$.

Les **probabilités conditionnelles** nous permet de raisonner dans des conditions avec des **informations partielles**.

1. Dans une expérience avec plusieurs lancés de dé, On vous dit que la somme des lancés est $\mathbf{9}$. Quelle est la probabilité que le premier lancé est un $\mathbf{6}$.
2. Dans un jeu de devinette de mots, la première lettre est un **T**. Quelle est la probabilité que la deuxième soit un **H**?

Les **probabilités conditionnelles** nous permet de raisonner dans des conditions avec des **informations partielles**.

1. Dans une expérience avec plusieurs lancés de dé, On vous dit que la somme des lancés est $9$. Quelle est la probabilité que le premier lancé est un $6$.
2. Dans un jeu de devinette de mots, la première lettre est un **T**. Quelle est la probabilité que la deuxième soit un **H**?
3. Quelle est la probabilité qu'un patient est **malade**, étant donne que son test est **négatif**.

Les **probabilités conditionnelles** nous permet de raisonner dans des conditions avec des **informations partielles**.

1. Dans une expérience avec plusieurs lancés de dé, On vous dit que la somme des lancés est $\mathbf{9}$. Quelle est la probabilité que le premier lancé est un $\mathbf{6}$.
2. Dans un jeu de devinette de mots, la première lettre est un **T**. Quelle est la probabilité que la deuxième soit un **H**?
3. Quelle est la probabilité qu'un patient est **malade**, étant donne que son test est **négatif**.
4. Un point s'affiche dans un radar d'observation, Quelle est la probabilité qu'elle correspond à un avion?

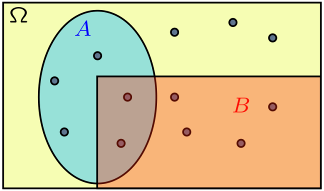
1. **Conditionnement**:

1. **Conditionnement**:
   - Modèle **révisé** avec une nouvelle information.

1. **Conditionnement**:
   - Modèle **révisé** avec une nouvelle information.
   - Un outil crucial pour **diviser pour régner**.

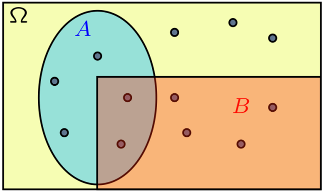
1. **Conditionnement**:
   - Modèle **révisé** avec une nouvelle information.
   - Un outil crucial pour **diviser pour régner**.
2. **Indépendance**

**Idée** de Conditionnement.

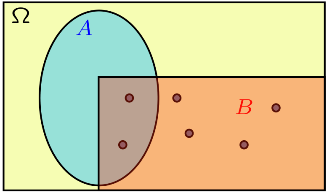



$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{12} \quad \mathbf{P}(B) = \frac{6}{12}$$

**Idée** de Conditionnement.



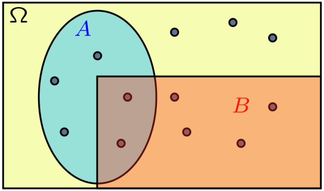

**Évènement** B est réalisé.



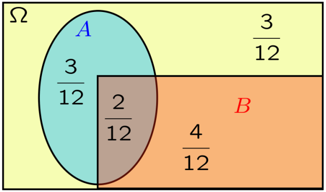

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{12} \quad \mathbf{P}(\mathrm{B}) = \frac{6}{12}$$

$$\mathbf{P}(A|\mathrm{B}) = \frac{2}{6} \quad \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{B}) = 1$$

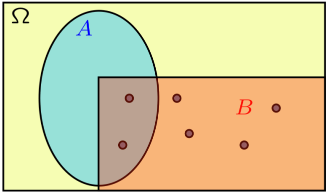
**Idée** de Conditionnement.




$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{12} \quad \mathbf{P}(B) = \frac{6}{12}$$

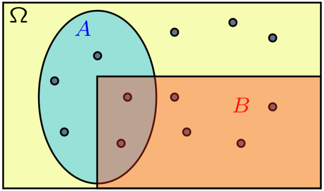



**Évènement** B est réalisé.

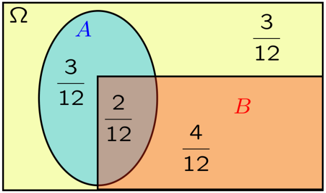



$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{2}{6} \quad \mathbf{P}(B|B) = 1$$

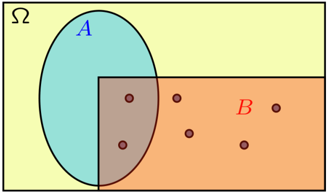
**Idée** de Conditionnement.



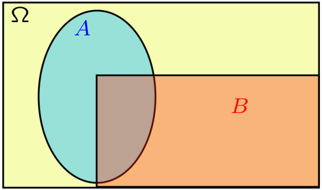

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{12} \quad \mathbf{P}(B) = \frac{6}{12}$$



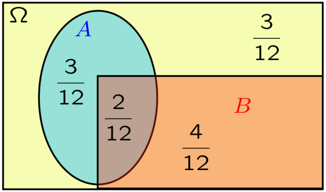

**Évènement** B est réalisé.

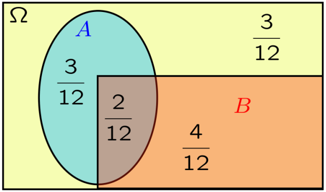



$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{2}{6} \quad \mathbf{P}(B|B) = 1$$



# Définition Conditionnement





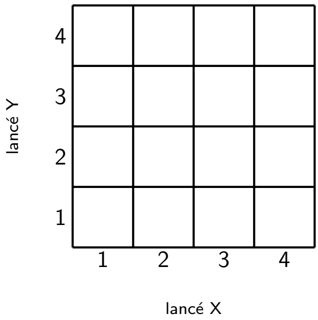

- $\mathbf{P}(A|B) =$ "probabilité A sachant B"

## Définition

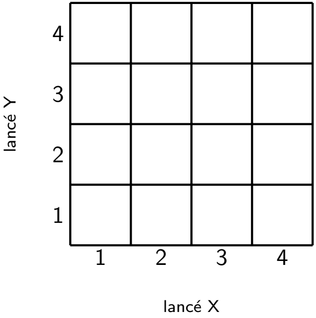
$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \tag{1}$$

- Cette définition ne peut avoir sens que si $\mathbf{P}(B) > 0$.

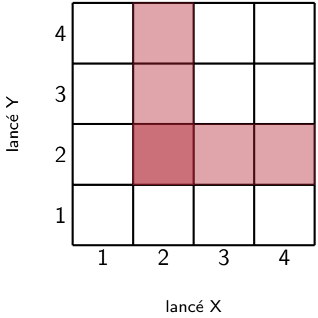
# Exemple: Lance de deux dé



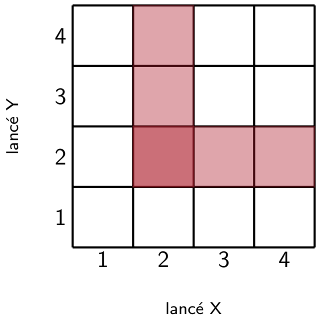
# Exemple: Lance de deux dé




- Soit **B** l'évènement: $\min(X, Y) = 2$.

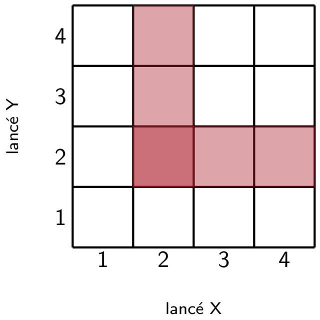



- Soit **B** l'évènement: $\min(X, Y) = 2$.

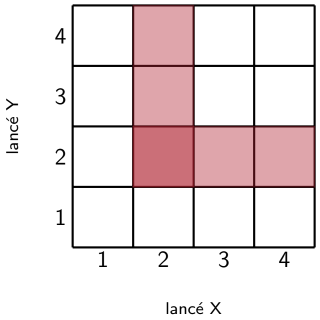



- Soit **B** l'évènement: $\min(X, Y) = 2$.
- Soit l'évènement $M = \max(X, Y)$.

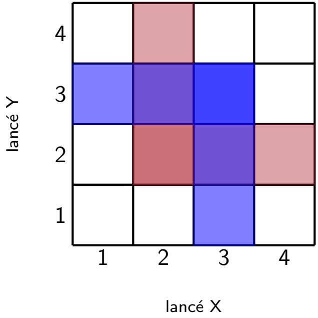
# Exemple: Lance de deux dé




- Soit **B** l'évènement: $\min(X, Y) = 2$.
- Soit l'évènement $M = \max(X, Y)$.
- $$P(M = 0|B) =$$




- Soit **B** l'évènement: $\min(X, Y) = 2$.
- Soit l'évènement $M = \max(X, Y)$.
  - $$P(M = 0|B) =$$
  - $$P(M = 3|B) =$$




- Soit **B** l'évènement: $\min(X, Y) = 2$.
- Soit l'évènement $M = \max(X, Y)$.
  - $$P(M = 0|B) =$$
  - $$P(M = 3|B) =$$

## Exemple

On considère l'espace des probabilités qui consiste de l'unité $\Omega = [0,1]^2$. On considère un loi **uniforme** de probabilité qui donne la probabilité de chaque évènement par sa **surface**.

- On considère l'évènement $B = \{(x,y) \mid y \leqslant x\}$
- Soit l'évènement $A = \left\{(x,y) \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

Calculer

$$P(A \mid B) =$$

# Axiomes probabilité conditionelle

1. $P(A \mid B) \geqslant 0$

# Axiomes probabilité conditionelle

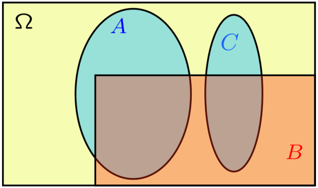
1. $P(A \mid B) \geqslant 0$
2. $P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$

# Axiomes probabilité conditionelle

1. $P(A \mid B) \geqslant 0$
2. $P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$
3. $P(B \mid B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$

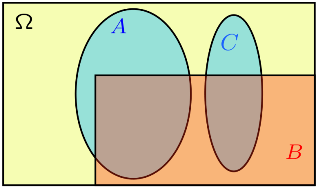
1. $P(A \mid B) \geqslant 0$
2. $P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$
3. $P(B \mid B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$
4. Si $A \cap C = \emptyset$ alors

   $$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(A \mid B)$$



1. $P(A \mid B) \geqslant 0$
2. $P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$
3. $P(B \mid B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$
4. Si $A \cap C = \emptyset$ alors

   $P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(A \mid B)$

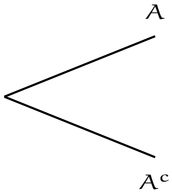



## Important

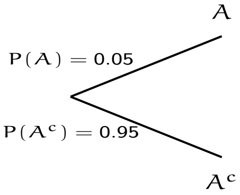
Puisque ces axiomes sont vrais, toutes les formules dérivées en utilisant ces axiomes, reste **valide** pour les probabilités conditionnelles.

- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air

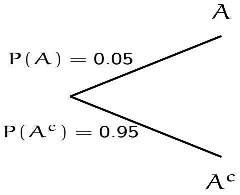
- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air



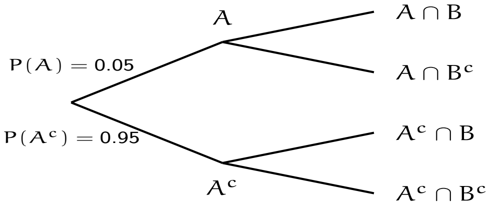
- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air



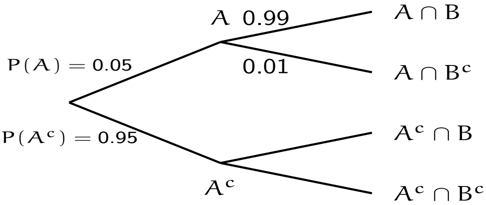
- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air
- Évènement **B**: On détecte l'avion dans le radar.



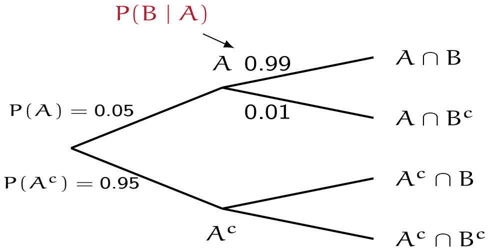
- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air
- Évènement **B**: On détecte l'avion dans le radar.



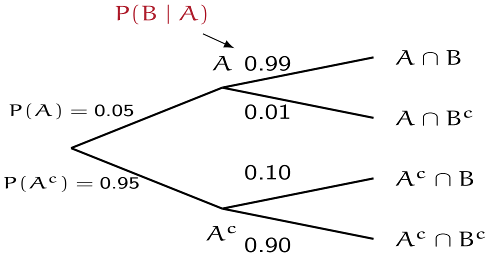
- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air
- Évènement **B**: On détecte l'avion dans le radar.



- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air
- Évènement **B**: On détecte l'avion dans le radar.

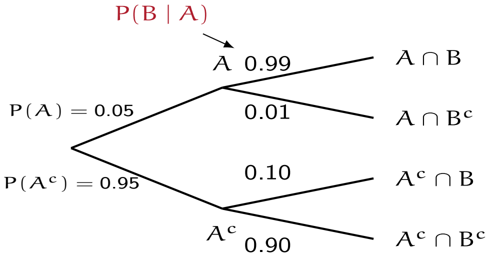


- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air
- Évènement **B**: On détecte l'avion dans le radar.



- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air
- Évènement **B**: On détecte l'avion dans le radar.

- $P(A \cap B)$:

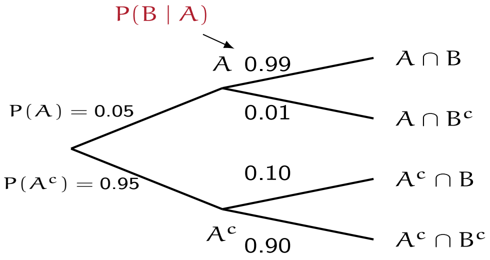


$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air
- Évènement **B**: On détecte l'avion dans le radar.

- $P(A \cap B)$:

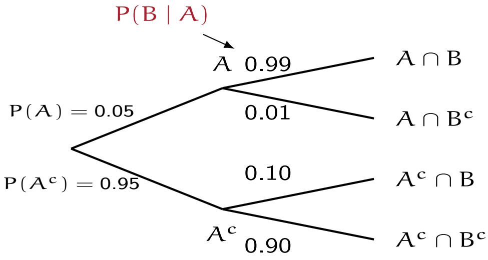
- $P(B)$:



$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Évènement **A**: Un avion vole dans l'air
- Évènement **B**: On détecte l'avion dans le radar.

- $P(A \cap B)$:
- $P(B)$:
- $P(A \mid B)$!!



# Règle de multiplication

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

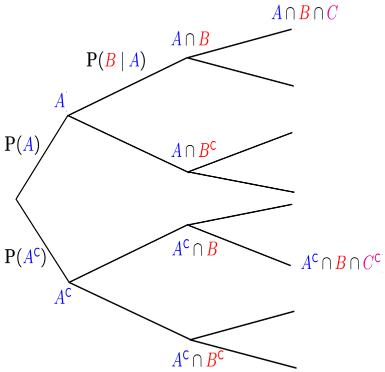
# Règle de multiplication

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)\, P(A \mid B) \\ &= P(A)\, P(B \mid A) \end{aligned}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

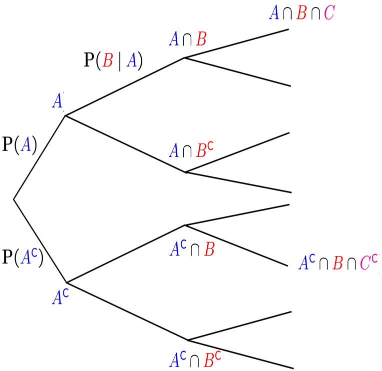
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)\, P(A \mid B) \\ &= P(A)\, P(B \mid A) \end{aligned}$$



$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)\,P(A \mid B) \\ &= P(A)\,P(B \mid A) \end{aligned}$$

$$P\left(A^c \cap B \cap C^c\right) =$$




$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) = P(A_1) \prod_{i=2}^{n} P(A_i \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{i-1})$$

# Pratique règle multiplication

- Est ce que les formules suivantes sont Correctes:

# Pratique règle multiplication

- Est ce que les formules suivantes sont Correctes:
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B)P(C^c | A \cap B)$

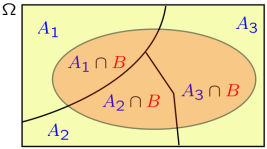
- Est ce que les formules suivantes sont Correctes:
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B)P(C^c | A \cap B)$
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(C^c | A)P(B \mid A \cap C^c)$

- Est ce que les formules suivantes sont Correctes:
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B)P(C^c \mid A \cap B)$
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(C^c \mid A)P(B \mid A \cap C^c)$
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(C^c \cap A \mid A)P(B \mid A \cap C^c)$

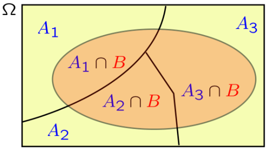
# Pratique règle multiplication

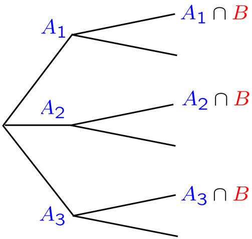
- Est ce que les formules suivantes sont Correctes:
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B)P(C^c | A \cap B)$
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(C^c | A)P(B \mid A \cap C^c)$
  - $P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(C^c \cap A | A)P(B | A \cap C^c)$
  - $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | A \cap C)$

# Formule de probabilité totale

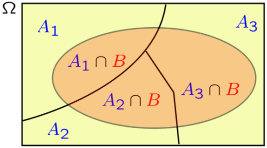


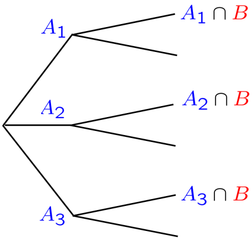

- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$.



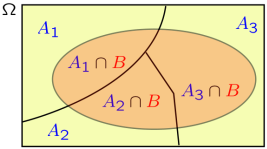



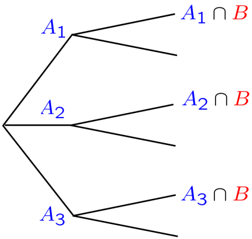

- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$.




- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$.
- On possède $P(B \mid A_i)$ pour chaque $i$.

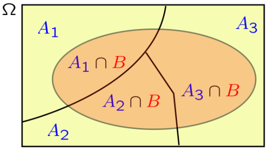


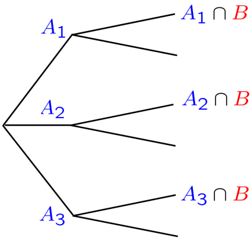




- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$.
- On possède $P(B \mid A_i)$ pour chaque $i$.

$$P(B)?$$

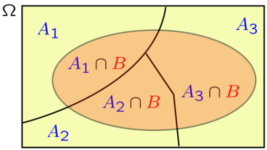
# Formule de probabilité totale

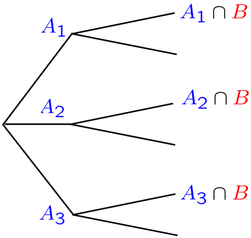



- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$.
- On possède $P(B \mid A_i)$ pour chaque $i$.

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$



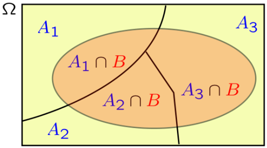

- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$.
- On possède $P(B \mid A_i)$ pour chaque $i$.

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

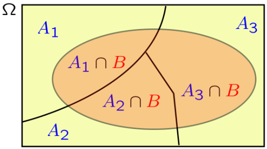
**Formule de probabilité totale.**

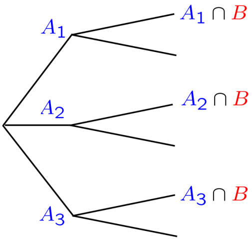
$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i)$$

# Règle de Bayes

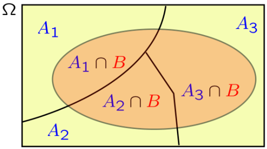


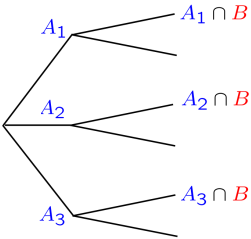

- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances a priori**



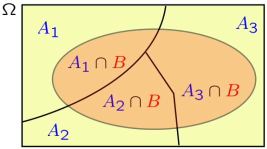

- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances a priori**

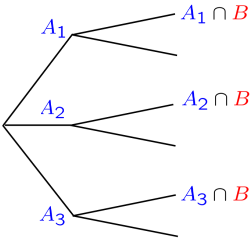



- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances a priori**
- On possède $P(B \mid A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances révisées**

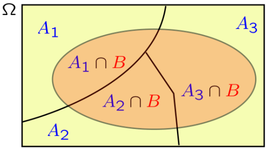
# Règle de Bayes

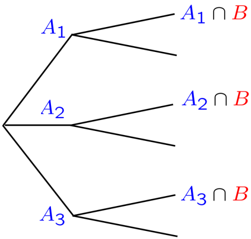



- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances a priori**
- On possède $P(B \mid A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances révisées**

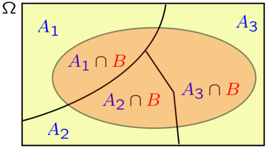
$$P(A_i \mid B)?$$

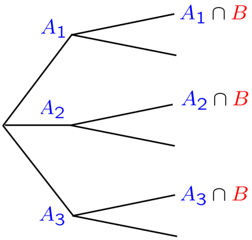



- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances a priori**
- On possède $P(B \mid A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances révisées**

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$




- On possède une partition $A_1, A_2, A_3$ de l'ensemble $\Omega$.
- On a $P(A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances a priori**
- On possède $P(B \mid A_i)$ pour chaque $i$. **Croyances révisées**

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

**Formule de Bayes.**

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)}$$