Probabilité : Science d'Incertitude et de Données.

A.Belcaid

ENSA-Safi

March 8, 2022

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le HASARD.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le HASARD.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le HASARD.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)
- **Informatique** et Réseaux de Télécommunications.

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le HASARD.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)
- **Informatique** et Réseaux de Télécommunications.
- **Traitement de signal et de la parole**.

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le HASARD.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)
- **Informatique** et Réseaux de Télécommunications.
- **Traitement de signal et de la parole**.
- **Biologie, Écologie**

Définition

Une théorie mathématique pour quantifier le HASARD.

Elle est **fondamentale** dans de nombreux domaines d'applications:

- **Physique**: (physique quantique, physique des particules)
- **Informatique** et Réseaux de Télécommunications.
- **Traitement de signal et de la parole**.
- **Biologie, Écologie**
- **Économie, Finance, Assurance**

- Innombrable situations ou le hasard intervient

Modèle probabiliste.

- Innombrable situations ou le hasard intervient

Abstraction

Nécessité d'une **abstraction mathématique** pour donner un cadre général d'étude.

Modèle probabiliste.

- Innombrable situations ou le hasard intervient

Abstraction

Nécessité d'une **abstraction mathématique** pour donner un cadre général d'étude.

Modèle probabiliste.

- Aussi utilise pour des fins **fin numeriques**: **Méthodes de Monte-Carlo.**

- Innombrable situations ou le hasard intervient

Abstraction

Nécessité d'une **abstraction mathématique** pour donner un cadre général d'étude.

Modèle probabiliste.

- Aussi utilise pour des fins **fin numeriques**: **Méthodes de Monte-Carlo.**

    - Efficace en **grande dimension**.

- Innombrable situations ou le hasard intervient

Abstraction

Nécessité d'une **abstraction mathématique** pour donner un cadre général d'étude.

Modèle probabiliste.

- Aussi utilise pour des fins **fin numeriques**: **Méthodes de Monte-Carlo.**

  - Efficace en **grande dimension**.
  - Simulation de phénomènes irréguliers.

Objectif du cours

Le but de ce cours est de vous donner une approche **élémentaire** mais rigoureuse de la théorie probabiliste et de l'illustrer avec un certain nombre de simulations.

A la fin du cours, on souhaite vous transmettre une démarche de mathématique appliqués, qui se décrit par les trois étapes suivantes:

- Modélisation.

Objectif du cours

Le but de ce cours est de vous donner une approche **élémentaire** mais rigoureuse de la théorie probabiliste et de l'illustrer avec un certain nombre de simulations.

A la fin du cours, on souhaite vous transmettre une démarche de mathématique appliqués, qui se décrit par les trois étapes suivantes:

- Modélisation.
- Résolution théorique

Objectif du cours

Le but de ce cours est de vous donner une approche **élémentaire** mais rigoureuse de la théorie probabiliste et de l'illustrer avec un certain nombre de simulations.

A la fin du cours, on souhaite vous transmettre une démarche de mathématique appliqués, qui se décrit par les trois étapes suivantes:

- Modélisation.
- Résolution théorique
- Expérimentation numérique

Expérience aléatoire

On appelle une **Expérience aléatoire** une expérience ξ, qui sous **conditions identiques**, peut reproduire **plusieurs résultats possibles** qui sont **imprévisible**[a].

[a] On ne peut pas prédire leur résultat par avance

Expérience aléatoire

On appelle une **Expérience aléatoire** une expérience ξ, qui sous **conditions identiques**, peut reproduire **plusieurs résultats possibles** qui sont **imprévisible**[a].

[a] On ne peut pas prédire leur résultat par avance

- Pour décrire une telle expérience, il nous faut:

Expérience aléatoire

On appelle une **Expérience aléatoire** une expérience ξ, qui sous **conditions identiques**, peut reproduire **plusieurs résultats possibles** qui sont **imprévisible**[a].

[a] On ne peut pas prédire leur résultat par avance

- Pour décrire une telle expérience, il nous faut:
  - Décrire tous les résultats possibles

Expérience aléatoire

On appelle une **Expérience aléatoire** une expérience ξ, qui sous **conditions identiques**, peut reproduire **plusieurs résultats possibles** qui sont **imprévisible**[a].

[a] On ne peut pas prédire leur résultat par avance

- Pour décrire une telle expérience, il nous faut:
  - Décrire tous les résultats possibles
  - Décrire notre croyance pour chaque résultat.

Espace d'états

Espace d'états

Espace d'État

Note $\boldsymbol{\Omega}$ espace de tous les résultats possibles.

Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:

Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:
  - Mutuellement exclusive.

Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:
  - Mutuellement exclusive.
  - Collectivement exhaustive

Espace d'État

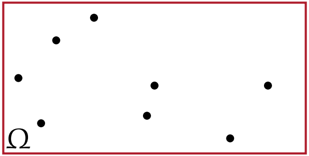
Note Ω espace de tous les résultats possibles.

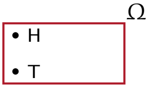
-
- Les évènements doivent être:
  - Mutuellement exclusive.
  - Collectivement exhaustive
  - Au niveau correct de détail?.

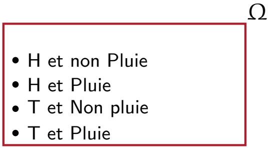
Espace d'État

Note Ω espace de tous les résultats possibles.

-
- Les évènements doivent être:
  - Mutuellement exclusive.
  - Collectivement exhaustive
  - Au niveau correct de détail?.







- Pour l'expérience de lancer un de, pour chaque choix, **Déterminer** si on possède un espace d'états correct.

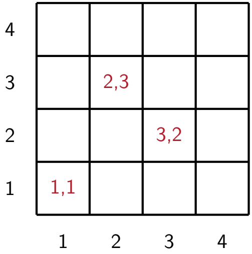
- Pour l'expérience de lancer un de, pour chaque choix, **Déterminer** si on possède un espace d'états correct.
  - $$\Omega = \{\text{H et pluie}, \text{H et non pluie}, \text{T}\} \quad (1)$$

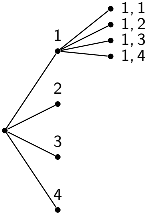
- Pour l'expérience de lancer un de, pour chaque choix, **Déterminer** si on possède un espace d'états correct.
  - $$\Omega = \{\text{H et pluie}, \text{H et non pluie}, \text{T}\} \qquad (1)$$
  - $$\Omega = \{\text{H et pluie}, \text{T et non pluie}, \text{T}\} \qquad (2)$$

Espace d'états : Discret/fini

Exemple

Lance de deux de a **quatre** faces.





Modèle arbre

- Lancé d'une balle dans une **position** (x, y) tel que $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

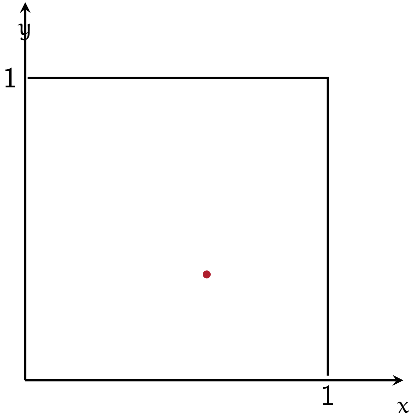


Figure: Exemple d'espace d'étai continus

Évènement

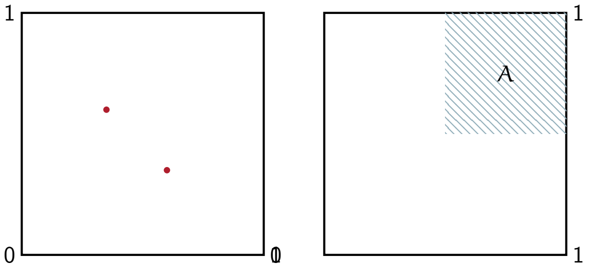
On appelle un **Évènement aléatoire** $\mathbf{A}$ un sous ensemble de l'ensemble d'étai ξ

- On associe des **probabilités** a des évènements.

Évènement

On appelle un **Évènement aléatoire** $\mathbf{A}$ un sous ensemble de l'ensemble d'étai ξ

- On associe des **probabilités** a des évènements.



Axiomes

1. Positivité:
$$P(A) \geqslant 0 \tag{3}$$
2. Normalité:
$$P(\Omega) = 1 \tag{4}$$
3. Additivité
$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{5}$$

Axiomes

- $P(A) \geqslant 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Conséquences

- $P(A) \leqslant 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Plus Généralement, pour k évènements disjoints:

$$P(\bigcup A_k) = \sum_k P(A_k) \tag{6}$$

- si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$

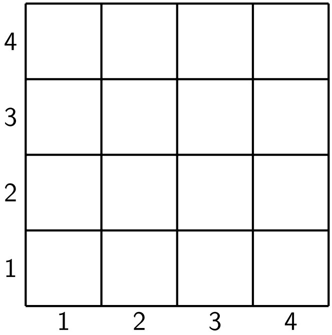
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Conséquences

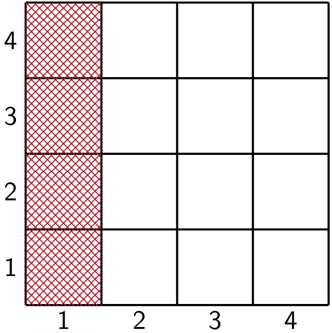
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

Lance d'un de a quatre faces.



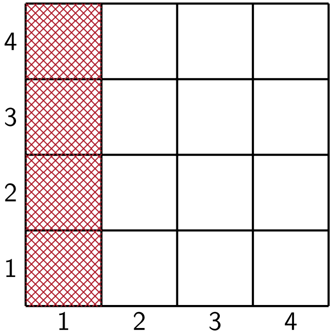
- $P(X = 1) =$

Lance d'un de a quatre faces.



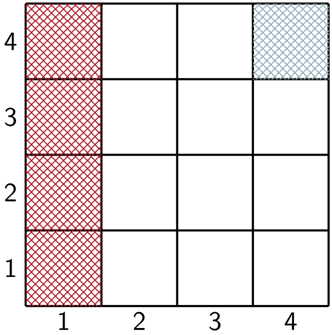
- $P(X = 1) =$

Lance d'un de a quatre faces.



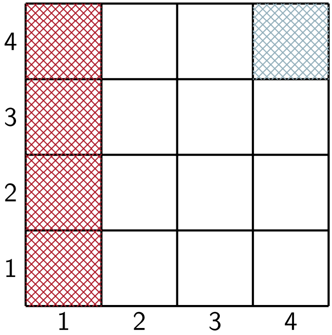
- $P(X = 1) =$
- Soit $Z = \min(x, y)$
- $P(Z = 4) =$

Lance d'un de a quatre faces.



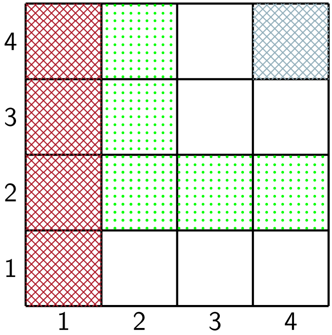
- $P(X = 1) =$
- Soit $Z = \min(x, y)$
- $P(Z = 4) =$

Lance d'un de a quatre faces.



- $P(X = 1) =$
- Soit $Z = \min(x, y)$
- $P(Z = 4) =$
- $P(Z = 2) =$

Lance d'un de a quatre faces.



- $P(X = 1) =$
- Soit $Z = \min(x, y)$
- $P(Z = 4) =$
- $P(Z = 2) =$

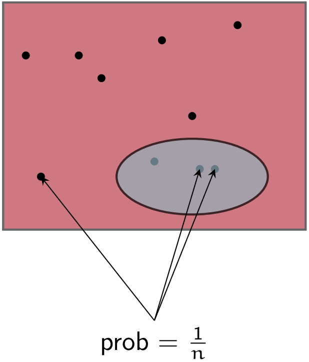
Exemple discret uniforme

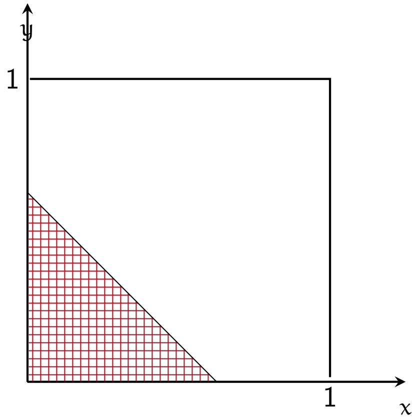
- On assume que Ω consiste de $\mathbf{n}$.
- Tous les éléments ont la **même probabilité**.
- L'évènement A contient $\mathbf{k}$ éléments.

Exemple discret uniforme

- On assume que Ω consiste de $\mathbf{n}$.
- Tous les éléments ont la **même probabilité**.
- L'évènement A contient $\mathbf{k}$ éléments.

$$P(A) = \frac{k}{n} \tag{7}$$





- Simple exemple uniforme: probabilité = surface.
-
$$P\left(\left\{(x,y) \mid x+y \leqslant \frac{1}{2}\right\}\right)$$
-
$$P\left(\{(0.5, 0.3)\}\right) =$$

Étapes de calcul de probabilité

1. Spécifier l'espace des **États**
2. Spécifier la **loi de probabilité**!!
3. Identifier l'**évènement**.
4. Calculer...

Exemple discret et Infini

- Espace d'états $\{1, 2, \ldots\}$

Exemple discret et Infini

- Espace d'états $\{1, 2, \dots\}$
- la loi de probabilité est donnée par:

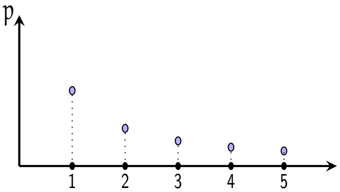
$$P(n) = \frac{1}{2^n}$$

Exemple discret et Infini

- Espace d'états $\{1, 2, \ldots\}$
- la loi de probabilité est donnée par:

$$P(n) = \frac{1}{2^n}$$

  - S'agit il d'une loi de probabilité?



  - Calculer $P($ résultat pair$) =$

- Resultat plus fort que la somme:

Theroeme

Si A_1, A_2, A_3, ... est une suite d'évènements disjoints, alors:

$$P(A_1 \cup P_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots. \tag{8}$$

- Faites attention que la somme doit etre **dénombrable**.