Prob Travaux Dirigés : Variable Aléatoire 6

ENSA-Safi

25 avril 2022

1. Loi de probabilité

Soit la variable aléatoire **X** et sa loi de probabilité :

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a}, & \text{pour } x\ in\{-3,-2,-1,1,2,3\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

ou $a > 0$ est un paramètre réel.

1.1) Déterminer la valeur de a.

1.2) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X^2$.

2. Loi d'un dé truqué

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

2.1) Déterminer la loi de X.

2.2) Calculer son espérance.

2.3) On pose $Y = \frac{1}{X}$, déterminer la loi de Y et son espérance.

3. Deux des a trois faces

On suppose qu'on dispose de **deux des** a trois faces. Ces faces seront indexées de 1 a 3. On lance les deux des indépendamment, et on note pour chaque $i = 1, 2$, la variable aléatoire X_i qui dénote le nombre de la face obtenue. On définit la variables aléatoire

$$X = X_2 - X_1$$

3.1) Donner la valeur numérique des entités suivantes :

$$\mathbf{P}_X(0)\ ,\ \mathbf{P}_X(1)\ ,\ \mathbf{P}_X(-2)\ ,\ \mathbf{P}_X(3)\ ,\ \mathbf{E}[X]\ ,\ \mathbf{var}(X).$$

3.2) On considère maintenant la variable aléatoire $Y = X^2$.

— Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbf{P}_Y(0)\ ,\ \mathbf{P}_Y(1)\ ,\ \mathbf{P}_Y(-2)$$

4. Cles

Une personne a quatre clés mais **une seule** ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne fonctionnent pas.

Soit **X** "Le nombre d'essais pour ouvrir la porte" qui est une variable aléatoire.

4.1) Déterminer la loi de probabilité de X.

4.2) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$.

5. Loi de Pacal

On considère une série d'épreuves indépendants. A chaque épreuve, on observe un **succes** avec une probabilité $\mathbf{p}$ et un échec avec une probabilité $\mathbf{1-p}$.

On considère la variable aléatoire **X** :

$X =$ "nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès".

5.1) Donner la loi de probabilité de X.

5.2) Vérifier que $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$.

5.3) Vérifier la propriété d'**absence de mémoire**

$$\mathbf{P}(X > k \mid X > j) = \mathbf{P}(X > k - j) \quad k > j$$

5.4) Vous décidez de vendre votre maison et d'accepter la première offre d'achat supérieure a **K** DH. ou K est fixe. On suppose que les offres d'achats sont des variables aléatoires indépendants dont on suppose la loi de probabilité est connue.

Soit **N** la variables aléatoire qui représente le nombre d'offres reçues avant de vendre la maison.

5.1) Donner la loi de probabilité de **N**.

5.2) Donner son espérance ?

6. Couple de variables

oit les variables aléatoires X et Y avec la loi de probabilité :

$$\mathbf{P}_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x+y)^2 & \text{Si } x \in \{1,2,4\} \text{ et } y \in \{1,3\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6.1) Calculer la valeur de c.

6.2) Calculer $\mathbf{P}(Y < X)$.

6.3) Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

6.4) Calculer $\mathbf{P}(X = 2)$ et $\mathbf{P}(x = 3)$.

6.5) Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[XY]$.

6.6) Donner la $\mathbf{var}(X)$.