Propriété Travaux Dirigés 2

ENSA-Safi

10 mars 2022

1. Problème de Parking

Ali et Najib doivent stationner leur voitures dans park contenant $n \geq 2$ stationnement consécutives. (i.e n espaces dans une rangée, ou seulement une voiture peut utiliser un stationnement).

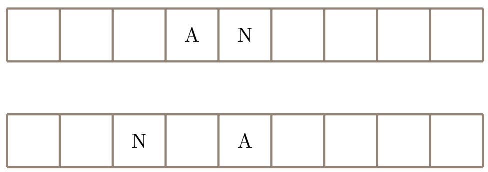

Figure 1 – Deux configurations possibles de stationnement

On suppose que Ali et Najib choisissent leurs positions aléatoirement.

1.1) Quelle est la probabilité qu'ils choisissent deux positions qui sont séparés par **au plus une seule case**. Deux exemples de cette configuration sont illustrés dans la figure (1).

2. Probabilités dans un espace continu

Ali et Najib doivent choisir un nombre **réel** aléatoire entre 0 et 1. On suppose que tous les réels peuvent être choisi équitablement. (i.e Calcul des probabilités est réduit au calcul des **surfaces**.

On note x le choix d'Ali et y celui de Najib. On définit les évènements suivants :

1. $A = \left\{(x, y) \mid |x - y| > \frac{1}{3}\right\}$

2. $B = \left\{(x, y) \mid \max(x, y) > \frac{1}{4}\right\}$

3. $C = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$

4. $D = \left\{(x, y); x > \frac{1}{4}\right\}$

Calculer les probabilités des évènements suivants :
$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(C)$, $P(D)$ et $P(A \cap D)$.

3. Inégalité Benferroni

3.1) Prouver que pour deux évènements A_1 et A_2, on as

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - 1$$

3.2) Généraliser cette inégalité, en montrant que pour n évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on as :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) - (n-1)$$