Espaces Vectoriels

A.Belcaid

Université Euro Méditerranéenne de Fès

January 24, 2021

Table de matière

1 Définition
- Sous-espace vectoriel
- Applications Linéaires

2 Dimension finie
- Famille libre
- Famille génératrice
- Base
- Dimension

Espace vectoriel

- **Structure** commune entre différents objets mathématiques
- Obtenir des théorèmes **généraux** qui s'appliquent non seulement aux **vecteurs** mais aussi à des fonctions, polynômes ou **matrices**.
- Cette généralité pose une **difficulté** à appréhender ces notions et vous demandera une **quantité conséquente de travail!**

- Dans le reste de chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. Dans la majorité des cas,

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

Définition

un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide E muni:

Définition

un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide E muni:

- Une loi de **composition interne**, c'est-à-dire d'une application de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans E:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ (A, \mathrm{B}) & \to & A + \mathrm{B} \end{array}$$

Définition

un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide E muni:

- Une loi de **composition interne**, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E:

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (A, B) & \to & A + B \end{array}$$

- D'une loi **externe**, c'est-à-dire d'une application $\mathbb{K} \times E$ dans E:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, A) & \to & \lambda. \end{array}$$

Condition des lois

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

Condition des lois

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \forall A, B \text{ et } C \in E$

Condition des lois

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \forall A, B \text{ et } C \in E$
3. il existe un **élément neutre** 0_E tel que $A + 0_E = A \quad (\forall A \in E)$

Condition des lois

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \forall A, B$ et $C \in E$
3. il existe un **élément neutre** 0_E tel que $A + 0_E = A \quad (\forall A \in E)$
4. Tout élément $A \in E$, admet un **symétrique** $A^{'}$ tel que $A + A^{'} = 0_E$

Condition des lois

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \forall A, B$ et $C \in E$
3. il existe un **élément neutre** 0_E tel que $A + 0_E = A \quad (\forall A \in E)$
4. Tout élément $A \in E$, admet un **symétrique** $A^{'}$ tel que $A + A^{'} = 0_E$

loi Externe

Condition des lois

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \forall A, B$ et $C \in E$
3. il existe un **élément neutre** 0_E tel que $A + 0_E = A \quad (\forall A \in E)$
4. Tout élément $A \in E$, admet un **symétrique** $A^{'}$ tel que $A + A^{'} = 0_E$

loi Externe

- $1.A = A \quad (\forall A \in E)$

Condition des lois

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \forall A, B$ et $C \in E$
3. il existe un **élément neutre** 0_E tel que $A + 0_E = A \quad (\forall A \in E)$
4. Tout élément $A \in E$, admet un **symétrique** A' tel que $A + A' = 0_E$

loi Externe

- $1.A = A \quad (\forall A \in E)$
- $\lambda.(\beta.A) = (\lambda\beta).A \quad (\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ et $A \in E)$

- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \forall A, B$ et $C \in E$
3. il existe un **élément neutre** 0_E tel que $A + 0_E = A \quad (\forall A \in E)$
4. Tout élément $A \in E$, admet un **symétrique** A' tel que $A + A' = 0_E$

loi Externe

- $1.A = A \quad (\forall A \in E)$
- $\lambda.(\beta.A) = (\lambda\beta).A \quad (\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ et $A \in E)$
- $\lambda(A + B) = \lambda.A + \lambda.B \quad (\forall A, B \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K})$

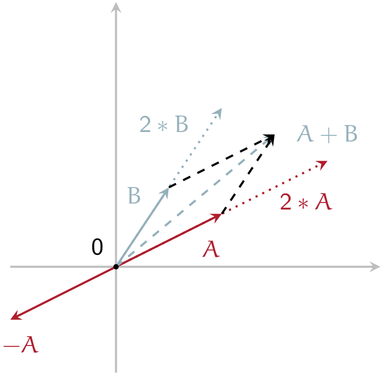
- La loi interne et externe doivent vérifier les conditions suivantes:

Condition Loi interne (Groupe)

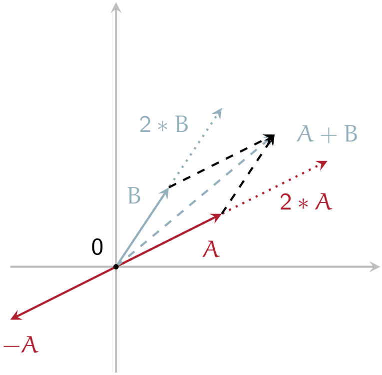
1. $A + B = B + A \qquad \forall A, B \in E$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \forall A, B$ et $C \in E$
3. il existe un **élément neutre** 0_E tel que $A + 0_E = A \quad (\forall A \in E)$
4. Tout élément $A \in E$, admet un **symétrique** $A^{'}$ tel que $A + A^{'} = 0_E$

loi Externe

- $1.A = A \quad (\forall A \in E)$
- $\lambda.(\beta.A) = (\lambda\beta).A \quad (\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ et $A \in E)$
- $\lambda(A + B) = \lambda.A + \lambda.B \quad (\forall A, B \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K})$
- $(\lambda + \beta).A = \lambda.A + \beta.A \quad (\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ et $A \in E.$



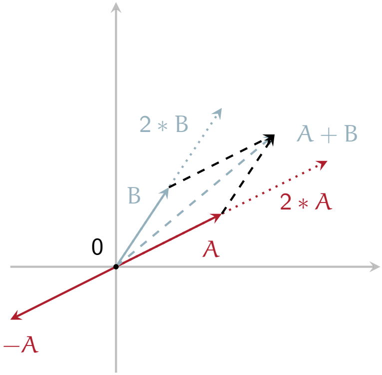
- $E = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \ , \ y \in \mathbb{R}\}$



- $E = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \; , \; y \in \mathbb{R}\}$
- **Loi interne**

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1 \; , \; x_2 + y_2)$$

Exemple (1) $\mathbb{R}^2$



- $E = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \ , \ y \in \mathbb{R}\}$
- **Loi interne**

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1 \ , \ x_2 + y_2)$$

- **Loi externe**

$$\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

- **Elément neutre**: $0 = (0, 0)$

Forme générale $\mathbb{R}^n$

- La généralisation de $\mathbb{R}^2$ où chaque élément est un **couple** est $\mathbb{R}^n$ où chaque élément un **n-uplet**

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

- La généralisation de $\mathbb{R}^2$ où chaque élément est un **couple** est $\mathbb{R}^n$ où chaque élément un **n-uplet**

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

- La loi **interne** est:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

- La généralisation de $\mathbb{R}^2$ où chaque élément est un **couple** est $\mathbb{R}^n$ où chaque élément un **n-uplet**

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

- La loi **interne** est:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

- **Loi externe**

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Plan

Tout **plan** $\mathcal{P}$ passant par **l'origine** est un espace vectoriel (muni des operations habituels de $\mathbb{R}^3$.)

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\right\}$$

- Vérifier les axioms d'un espace vectoriel.

Exemple (4): Espace des fonctions

- L'ensemble des **fonctions** de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ que nous notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- **Loi interne**: Pour deux fonctions f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

- **Loi externe**: notée $\times$.

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \tag{1}$$

- **Elément neutre** :

$$0_{\mathcal{F}}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- **Opposé** :

$$(-f)(x) = -f(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

- L'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est dit $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- L'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est dit $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Les éléments de E sont appelés des **vecteur**.

Terminologie

- L'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est dit $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Les éléments de E sont appelés des **vecteur**.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

- L'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est dit $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Les éléments de E sont appelés des **vecteur**.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.
- L'élément neutre de la loi interne est 0_{E} est appelé **vecteur nul**.

- L'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est dit $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Les éléments de E sont appelés des **vecteur**.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.
- L'élément neutre de la loi interne est 0_{E} est appelé **vecteur nul**.
- L'inverse d'un vecteur A dans E est appelé **opposé**.

- L'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est dit $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Les éléments de E sont appelés des **vecteur**.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.
- L'élément neutre de la loi interne est 0_E est appelé **vecteur nul**.
- L'inverse d'un vecteur A dans E est appelé **opposé**.
- On se refère à la loi externe par **multiplication**.

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. alors

Proposition

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $A \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. alors

Proposition

1. $0.A = 0_{\mathrm{E}}$.

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. alors

Proposition

1. $0.A = 0_E$.
2. $\lambda.0_E = 0_E$ (**élément absorbant**)

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $A \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. alors

Proposition

1. $0.A = 0_{\mathrm{E}}$.
2. $\lambda.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$ (**élément absorbant**)
3. $(-1).A = -A$

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $A \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. alors

Proposition

1. $0.A = 0_{\mathrm{E}}$.
2. $\lambda.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$ (**élément absorbant**)
3. $(-1).A = -A$
4. $\lambda.A = 0_{\mathrm{E}} \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad A = 0_{\mathrm{E}}$

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. alors

Proposition

1. $0.A = 0_E$.
2. $\lambda.0_E = 0_E$ (**élément absorbant**)
3. $(-1).A = -A$
4. $\lambda.A = 0_E \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad A = 0_E$

- Donner un preuve?

Pour chaque cas, vérifier s'il s'agit d'une **espace vectoriel**?

Mini-exercice

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues positives ou nulles, pour l'**addition** et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ par les mêmes opérations.
3. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations
$$x \oplus y = xy \quad \lambda.x = x^{\lambda} (\lambda \in \mathbb{R})$$
4. L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant
$$sin(x + y) = 0$$
5. L'ensmble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ **orthogonaux** au vecteur $(-1, 3, -2)$.

Définition

Similaire à la notion de groupe. Si on possède un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Une **partie** F de E est appelée un **sous espace vectoriel** si:

Définition

Similaire à la notion de groupe. Si on possède un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Une **partie** F de E est appelée un **sous espace vectoriel** si:

- $0_E \in F$. (**élément neutre**)

Définition

Similaire à la notion de groupe. Si on possède un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Une **partie** F de E est appelée un **sous espace vectoriel** si:

- $0_E \in F$. (**élément neutre**)
- $A + B \in F \quad \forall A, B \in F$. Loi interne

Définition

Similaire à la notion de groupe. Si on possède un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Une **partie** F de E est appelée un **sous espace vectoriel** si:

- $0_E \in F$. (**élément neutre**)
- $A + B \in F \quad \forall A, B \in F$. Loi interne
- $\lambda.A \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in F$ (**Loi externe**)

Droite passant par l'origine

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 3x - 2y = 0\}$$

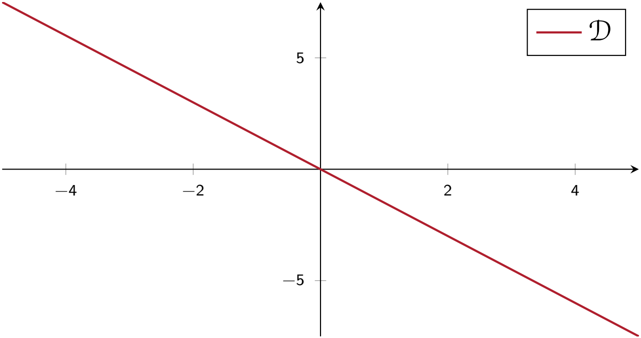
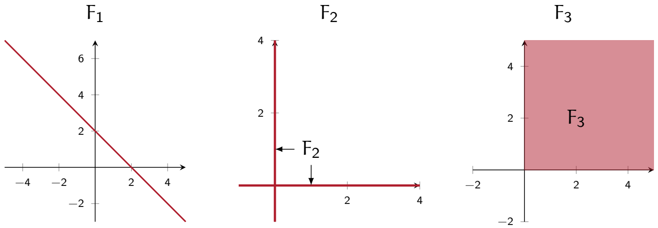


Figure: Droite passant par l'origine

Sous groupes ?

- $$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$$
- $$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$$
- $$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$$



Figure

Pour chaque cas, vérifier s'il s'agit d'un espace vectoriel

Mini Exercice

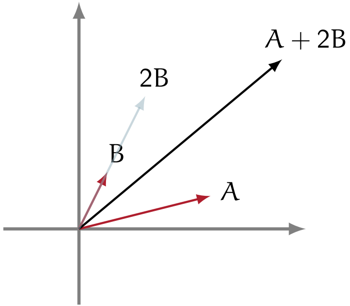
1. L'ensemble des fonction **paires**.
2. L'ensemble des fonctions **impaires**.
3. $$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z\right\}$$
4. $$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geqslant 0\}$$
5. $$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante}\}$$
6. $$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n) \to 0\}$$

Définition

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle une **combinaison linéaire** des $(B_i)_{1,n}$ est un **vecteur**:

$$V = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \ldots + \lambda_n B_n \tag{2}$$

- Si $n = 1$, alors $V = \lambda B$. on dit alors que V et B sont **colinéaire**.



Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $(4,1,3)$ est une combinaison linéaire de $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$ car:
$$(4,1,4) = 4(1,0,1) + 1(0,1,0)$$
2. Est ce que le vecteur $(2,1)$ est **collinéaire** avec $(1,0)$?
3. On considère l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les monômes
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3$$
alors la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des (f_i)
$$f(x) = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0$$

Exemple (1)

Soit $u = (1, 2, -1)$ et $v = (6, 4, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $w = (9, 2, 7)$ est une combinaison linéaire de u et v.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\beta \\ 2\lambda + 4\beta \\ -\lambda + 2\beta \end{pmatrix}$$

Ainsi on trouve:

$$\begin{cases} 9 & = & \lambda + 6\beta \\ 2 & = & 2\lambda + 4\beta \\ 7 & = & -\lambda + 2\beta \end{cases}$$

On retrouve que $\lambda = -3, \ \beta = 2$

Exemple (1)

Soit $u = (1, 2, -1)$ et $v = (6, 4, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $w = (9, 2, 7)$ est une combinaison linéaire de u et v.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\beta \\ 2\lambda + 4\beta \\ -\lambda + 2\beta \end{pmatrix}$$

Ainsi on trouve:

$$\begin{cases} 9 & = & \lambda + 6\beta \\ 2 & = & 2\lambda + 4\beta \\ 7 & = & -\lambda + 2\beta \end{cases}$$

On retrouve que $\lambda = -3, \ \beta = 2$

Exemple (2)

Reprenez la même procédure pour $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$ et $w = (4, -1, 8)$.

Caractérisation Sous espace vectoriel

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une **partie** non vide de E. F est un sous espace vectoriel **si et seulement si**:

$$\underbrace{\lambda U + \mu V}_{\text{combinaison linéaire}} \in F \quad \forall U, V \in F \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \tag{3}$$

- Donner une preuve

Proposition

Soient F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L' **intersection** $F \cap G$ est aussi un espace vectoriel.

- Donner une preuve?

Exemple

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\; x + 3y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\right\}$$

On peut considérer

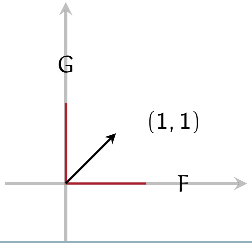
$$\begin{cases} F & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\} \\ G & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\} \end{cases}$$

Remarque

Malheureusement, **L'union** de deux sous espaces vectoriels **n'est** pas un sous espace vectoriel.

Contre exemple

$$\begin{cases} F = \{(x,y) \mid x = 0\} \\ G = \{(x,y) \mid y = 0\} \\ (0,1) \in F \cup G \text{ et } (1,0) \in F \cup G \text{ mais } (1,1) \notin F \cap G \end{cases}$$



Somme directe

Si on cherche un espace vectortiel qui contient F et F. On définit la **somme directe** de F et G

$$F + G = \{u + v \mid u \in F,\ v \in G\} \tag{4}$$

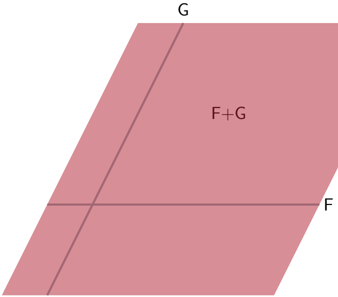


Figure: Somme directe

Propriété Somme directe

Proposition

Soient E e F deux **sous-espaces** vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition

Soient E e F deux **sous-espaces** vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $F + G$ est **sous espace** vectoriel.

Proposition

Soient E e F deux **sous-espaces** vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $F + G$ est **sous espace** vectoriel.
2. $F + G$ est **le plus petit** sous espace vectoriel contenant à l fois F et G.

Proposition

Soient E e F deux **sous-espaces** vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $F+G$ est **sous espace** vectoriel.
2. $F+G$ est **le plus petit** sous espace vectoriel contenant à l fois F et G.

Exemple

$$\begin{cases} F &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\right\} \\ G &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\right\} \end{cases}$$

Déterminer l'espace vectoriel

$$F+G$$

.

Somme directe

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. F et G sont en **somme directe** si:

1. $F \cap G = \{0_E\}$
2. $F + G = E$.

Dans ce cas on dit que F et G sont **supplémentaires** et on écrit:

$$E = F \oplus G \tag{5}$$

Proposition

F et G sont supplémentaires dans E si tout élément de E s'écrit d'une manière **unique** comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 1

$$\begin{cases} F & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \\ G & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \end{cases}$$

prouver que

$$\mathbb{R}^2 = F \oplus G$$

Exemple 1

$$\begin{cases} F & = & \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\} \\ G & = & \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \end{cases}$$

prouver que

$$\mathbb{R}^2 = F \oplus G$$

Exemple 2

Même question dans $\mathbb{R}^3$ pour

$$\begin{cases} F & = & \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\right\} \\ G & = & \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\right\} \end{cases}$$

Théorème

Soient $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors:

Cet espace est appelé espace **engendré** par $v_1, \dots, v_n$:

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\} \tag{6}$$

Théorème

Soient $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors:

- L'ensemble des **combination linéaires** de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un **sous espace vectoriel** de E.

Cet espace est appelé espace **engendré** par $v_1, \ldots, v_n$:

$$\text{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\} \tag{6}$$

Théorème

Soient $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors:

- L'ensemble des **combination linéaires** de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un **sous espace vectoriel** de E.
- C'est le plus petit sous espace vectoriel contenant les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Cet espace est appelé espace **engendré** par $v_1, \ldots, v_n$:

$$\text{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\} \tag{6}$$

Exemples Espace Engedré

Exemples Espace Engedré

- Si u est un vecteur d'un espace vectoriel E,

$$\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$$

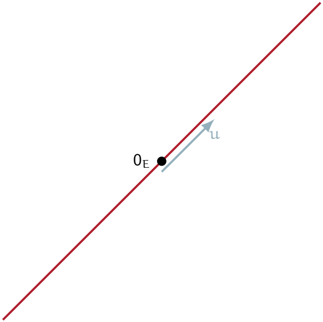


Figure: Droite vectotielle

Exemples Espace Engedré

- Si u est un vecteur d'un espace vectoriel E,

$$\text{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$$

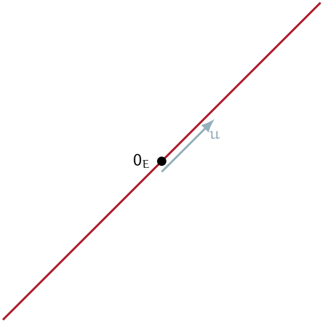


Figure: Droite vectotielle

- Si u est un vecteur d'un espace vectoriel E,

$$\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$$

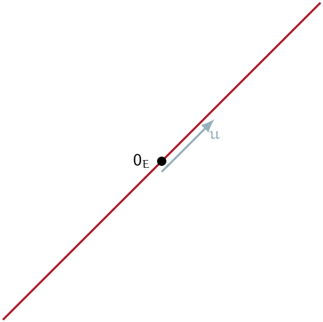


Figure: Droite vectotielle

Si u et v sont deux vecteurs de E, on définit un **plan vectoriel** par:

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$$

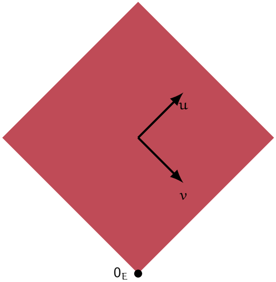


Figure: Plan vectoriel

Exemple Polynomes

L'ensemble

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2 &= \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = \mathbf{2}\} \\
\mathcal{P}_2 &= \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = aX^2 + bX + c\right\} \\
\mathcal{P}_2 &= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1)
\end{aligned}$$

Exemple Polynomes

L'ensemble

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2 &= \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = \mathbf{2}\} \\
\mathcal{P}_2 &= \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = aX^2 + bX + c\right\} \\
\mathcal{P}_2 &= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1)
\end{aligned}$$

Exemple 3

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\right\}$$

Exemple Polynomes

L'ensemble

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2 &= \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = \mathbf{2}\} \\
\mathcal{P}_2 &= \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = aX^2 + bX + c\right\} \\
\mathcal{P}_2 &= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1)
\end{aligned}$$

Exemple 3

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\right\}$$

Exemple 2

Exemple Polynomes

L'ensemble

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2 &= \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = \mathbf{2}\} \\
\mathcal{P}_2 &= \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = aX^2 + bX + c\right\} \\
\mathcal{P}_2 &= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1)
\end{aligned}$$

Exemple 3

$$\begin{aligned}
F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\right\} \\
F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y + z, y, z)\right\}
\end{aligned}$$

Exemple Polynomes

L'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2 &= \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = \mathbf{2}\} \\ \mathcal{P}_2 &= \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = aX^2 + bX + c\right\} \\ \mathcal{P}_2 &= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1)\end{aligned}$$

Exemple 3

$$\begin{aligned}F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\right\} \\ F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y + z, y, z)\right\} \\ F &= y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)\end{aligned}$$

Exemple Polynomes

L'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 &= \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = \mathbf{2}\} \\ \mathcal{P}_2 &= \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = aX^2 + bX + c\right\} \\ \mathcal{P}_2 &= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1) \end{aligned}$$

Exemple 3

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\right\} \\ F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y + z, y, z)\right\} \\ F &= y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1) \\ F &= \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0), (1, 0, 1)\right) \end{aligned}$$

Définition

Soient E et F deux espace vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle satisfait les deux conditions suivantes:

Définition

Soient E et F deux espace vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est une **application linéaire** si elle satisfait les deux conditions suivantes:

1. $\forall u, v \in E \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$

Définition

Soient E et F deux espace vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle satisfait les deux conditions suivantes:

1. $\forall u, v \in E \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Définition

Soient E et F deux espace vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle satisfait les deux conditions suivantes:

1. $\forall u, v \in E \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$

- Une application linéaire doit **respecter** les deux lois d'un espace vectotiel.

Définition

Soient E et F deux espace vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle satisfait les deux conditions suivantes:

1. $\forall u, v \in E \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$

- Une application linéaire doit **respecter** les deux lois d'un espace vectotiel.
- L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$

Définition

Soient E et F deux espace vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle satisfait les deux conditions suivantes:

1. $\forall u, v \in E \quad f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$

- Une application linéaire doit **respecter** les deux lois d'un espace vectotiel.
- L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$
- f est aussi appelé un **morphisme** d'espace vectoriel.

Définition

Soient E et F deux espace vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle satisfait les deux conditions suivantes:

1. $\forall u, v \in E \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$

- Une application linéaire doit **respecter** les deux lois d'un espace vectotiel.
- L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$
- f est aussi appelé un **morphisme** d'espace vectoriel.
- Une application f de E vers $\mathbf{E}$ est appelé un **endomorphisme** de E.

Exemple

Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{llll} f & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \rightarrow & (-2x, y + 3z) \end{array}$$

Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Exemple

Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \rightarrow & (-2x, y + 3z) \end{array}$$

Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Exemple 2

L'application

$$\begin{array}{cccc} g & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & x^2 \end{array}$$

est-elle linéaire?

Propriétés d'une applicaiton linéaire

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alore on as:

Propriétés d'une applicaiton linéaire

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alore on as:

- $f(0_E) = 0_F$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alore on as:

- $f(0_E) = 0_F$
- $f(-u) = -f(u) \quad \forall u \in E$

Propriétés d'une applicaiton linéaire

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alore on as:

- $f(0_E) = 0_F$
- $f(-u) = -f(u) \quad \forall u \in E$

Caractérisation d'une application linéaire

Une méthode plus **concentrée** pour vérifier que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de prouver que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \tag{7}$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alore on as:

- $f(0_E) = 0_F$
- $f(-u) = -f(u) \quad \forall u \in E$

Caractérisation d'une application linéaire

Une méthode plus **concentrée** pour vérifier que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de prouver que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \tag{7}$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alore on as:

- $f(0_E) = 0_F$
- $f(-u) = -f(u) \quad \forall u \in E$

Caractérisation d'une application linéaire

Une méthode plus **concentrée** pour vérifier que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de prouver que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \tag{7}$$

Préservation combinaison linéaire

$$f\Big(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(v_i) \tag{8}$$

Mini exercice

Pour chaque cas, vérifier si f_i est une applicaiton linéaire

1. $$f_1(x,y) = (-x, -y)$$
2. $$f_2(x,y) = (3x, 3y)$$
3. $$f_3(x,y) = (x, y)$$
4. $$f_4(x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \quad , \quad \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$$

Symétrie centrale

La **symétrie centrale** par rapport à 0_E dans un espace vectoriel E est définit comme suit:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longrightarrow & -u \end{array} \tag{9}$$

Symétrie centrale

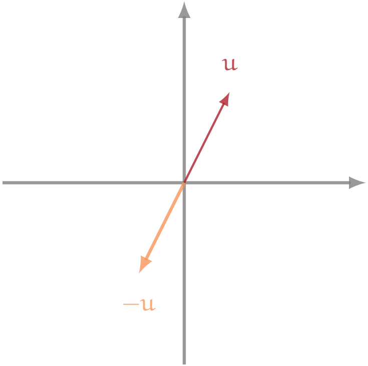
La **symétrie centrale** par rapport à 0_E dans un espace vectoriel E est définit comme suit:

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longrightarrow & -u \end{array} \tag{9}$$

Symétrie centrale

La **symétrie centrale** par rapport à 0_E dans un espace vectoriel E est définit comme suit:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longrightarrow & -u \end{array} \tag{9}$$



Homotétie

L'**homotétie** de rapport λ d'un espace vectoriel est définit comme suit:

$$
\begin{array}{rccc}
f: & E & \longrightarrow & E \\
 & u & \longrightarrow & \lambda.u
\end{array}
\tag{10}
$$

Homotétie

L'**homotétie** de rapport λ d'un espace vectoriel est définit comme suit:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longrightarrow & \lambda.u \end{array} \tag{10}$$

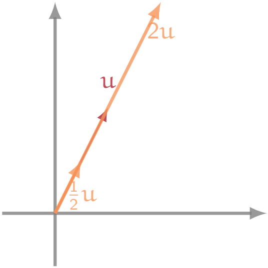


Figure: Représentation Homotétie

Homotétie

L'**homotétie** de rapport λ d'un espace vectoriel est définit comme suit:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longrightarrow & \lambda.u \end{array} \tag{11}$$

Homotétie

L'**homotétie** de rapport λ d'un espace vectoriel est définit comme suit:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longrightarrow & \lambda.u \end{array} \quad (11)$$

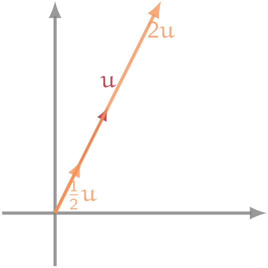


Figure: Représentation Homotétie

Projection

Si F et G sont deux sous espace vectoriels **complémentaires** dans E. Alors on peut définir deux **projections** P_F et P_G donnés comme: Pour chaque $u \in E$ on as $u = v + w$.

$$\begin{aligned} P_F : E &\longrightarrow \mathbf{F} \\ u &\longrightarrow v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_G : E &\longrightarrow \mathbf{G} \\ u &\longrightarrow w \end{aligned} \tag{12}$$

Projection

Si F et G sont deux sous espace vectoriels **complémentaires** dans E. Alors on peut définir deux **projections** P_F et P_G donnés comme: Pour chaque $u \in E$ on as $u = v + w$.

$$\begin{aligned} P_F : E &\longrightarrow \mathbf{F} \\ u &\longrightarrow v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_G : E &\longrightarrow \mathbf{G} \\ u &\longrightarrow w \end{aligned} \tag{12}$$

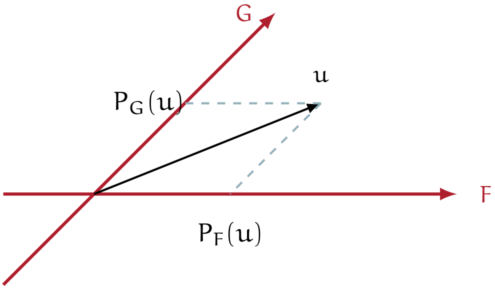


Figure: Projection Espace Supplémentaires

Mini Exercice

Pour chaque exemple, vérifier si l'application est **linéaire**

1. $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 3x-2 \end{array} \tag{13}$$

2. $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longrightarrow & x_1x_3 + x_2x_4 \end{array} \tag{14}$$

3. $$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longrightarrow & f + f' \end{array} \tag{15}$$

4. $$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longrightarrow & \max\big(f(x)\big) \end{array} \tag{16}$$

Image d'une application linéaire

Soientt E et F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors on définit **l'image directe** de E par:

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) \in F \mid x \in E\}$$

alors on a $\mathrm{Im} f$ est un **sous espace vectoriel** de F.

Résultats

- Si E' est un sous espace vectoriel de E alors, $\mathrm{Im} E'$ est aussi un **sous espace** vectoriel de F.
- $$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f = F$$

Noyau

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle **noyau** de f noté $\mathrm{Ker}(f)$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\} \tag{17}$$

Noyau

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle **noyau** de f noté $\mathrm{Ker}(f)$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\} \tag{17}$$

Proposition

Si E et F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un **sous espace vectoriel** de E.

Noyau

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle **noyau** de f noté $\mathrm{Ker}(f)$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\} \tag{17}$$

Proposition

Si E et F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un **sous espace vectoriel** de E.

Exemple

Calculer le noyau de

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longrightarrow & (-2x, y + 3z) \end{array}$$

Introduction

- Les espaces vectoriels qui sont engendrés par un nombre **fini** de vecteurs sont appelés des espaces vectoriels de dimension finie.
- Le but de cette section est de savoir comment calculer une **base** pour cet espace.

Famille libre

Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ où $p \geqslant 1$ est dite **famille libre** si toute combinaison linéaire **nulle** :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_p v_p = 0$$

n'admet qu'une seule solution

$$\lambda_1 = 0 \;\; \lambda_2 = 0 \;\; \ldots \lambda_p = 0$$

- Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée**

Exemple

On considère dans $\mathbb{R}^3$ la famille:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut vérifier si cette famille est **libre** ou non?

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(4,5,6) + \lambda_3(2,1,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\left\{ \begin{array}{llllc} \lambda_1 & +4\lambda_2 & +2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & +5\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & +6\lambda_2 & & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemple

On considère dans $\mathbb{R}^3$ la famille:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut vérifier si cette famille est **libre** ou non?

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(4,5,6) + \lambda_3(2,1,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \lambda_1 & +4\lambda_2 & +2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & +5\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & +6\lambda_2 & & = & 0 \end{array} \right.$$

On peut vérifier que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 1$ est une solution. Ainsi cette famille est **liée**.

Famille trigonométique

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la famille:

$$F = \left\{ \sin, \cos \right\}$$

Est ce que cette famille est libre ou liée?

Famille trigonométique

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la famille:

$$F = \{\sin, \cos\}$$

Est ce que cette famille est libre ou liée?

$$\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0$$

- Pour $x = 0$ on trouve que $\lambda_1 = 0$
- Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on trouve que $\lambda_2 = 0$

Ainsi cette famille est **libre**.

Cas deux vecteur

La famille $\{v_1, v_2\}$ est

- liée si v_1 est un multiple de v_2 ou **inversement**.
- **libre** sinon

Famille Liée (Identification)

Cas deux vecteur

La famille $\{v_1, v_2\}$ est

- liée si v_1 est un multiple de v_2 ou **inversement**.
- **libre** sinon

Généralisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est $F = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille avec $p \geqslant 2$.
Alors F est **liée** si l'un de vecteurs s'écrit comme **combinaison linéaire** des autres vecteurs.

Famille Liée (Identification)

Cas deux vecteur

La famille $\{v_1, v_2\}$ est

- **liée** si v_1 est un multiple de v_2 ou **inversement**.
- **libre** sinon

Généralisation

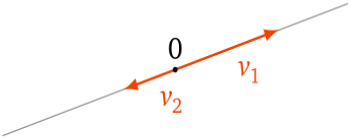
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est $F = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille avec $p \geqslant 2$.
Alors F est **liée** si l'un de vecteurs s'écrit comme **combinaison linéaire** des autres vecteurs.

Exemle

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

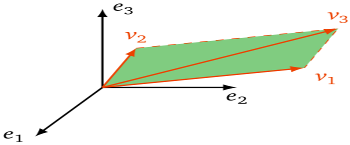
$\mathbb{R}^2$

Deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ sont liés (**linéairement dépendents**) s'ils sont **colinéaires**



$\mathbb{R}^3$

Deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ sont liés (**linéairement dépendents**) s'ils sont **colplanaires**



Mini Exercice

- On considère la famille
$$\left\{(-1, t)\ ,\ (t^2, -t)\right\} \tag{18}$$
Pour quels valeurs de t cette famille est libre?
- Montrer que toute famille **contenant** une famille liée est liée.
- Montrer que toute famille **contenue** dans une famille libre est libre.
- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire **injective**. Montrer alors que si $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une famille libre de E, alors $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\}$ est une famille libre de F.

Famille génératrice

Définition

Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une **famille génératrice** de l'espace vectoriel E si:

$$\forall u \in E \quad u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p \tag{19}$$

- On dit que la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ **engendre** l'espace vectoriel E.
- $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$

Exemple

Soit $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.

La famille $F = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad u = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

Exemple 2

Si on considère $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $E = \mathbb{R}^3$.

Ces deux vecteurs ne forment pas une famille génératice car le vecteur $(0,1,0) \notin \{v_1, v_2\}$ Car

$$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,3) = (0,1,0) \tag{20}$$

implique que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution!

Proposition

Si $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une famille **génératrice** de E. alors $\mathcal{F}^{'} = \left\{v_1^{'}, v_2^{'}, \ldots, v_p^{'}\right\}$ est aussi une famille génératrice si et seulement si tout élément de $\mathcal{F}$ est une combinaison linéaire de $\mathcal{F}^{'}$.

- Cette propriété ne change pas le cardinal des familles génératrice.
- Nous cherchons à avoir un nombre minimal de **générateurs**

Proposition

Si $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une famille **génératrice** de E. alors $\mathcal{F}' = \left\{v_1', v_2', \ldots, v_p'\right\}$ est aussi une famille génératrice si et seulement si tout élément de $\mathcal{F}$ est une combinaison linéaire de $\mathcal{F}'$.

- Cette propriété ne change pas le cardinal des familles génératrice.
- Nous cherchons à avoir un nombre minimal de **générateurs**

Réduction

Si la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ engendre E. Et si l'un des vecteur (par exemple) v_p est une **cominaison linéaire** des autre alors:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\} \tag{21}$$

est une famille **génératrice**.

Mini Exercice

- A quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$, la famille $\{(0, t-1), (t, -t), (t^2 - t, t-1)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
- Même question avec la famille

$$\{(1, 0, t), (1, t, t^2), (1, t^2, 1)\}$$

- Montrer que si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire **surjective** et que $v_1, \ldots, v_p$ est une famille génératrice de E.
  Alors $\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ est aussi une famille génératrice de F.

Introduction

- La notion de **base** généralise la notion de **repère**.
- Dans $\mathbb{R}^2$, un repère est donné par deux vecteurs non **colinéaires**.
- Dans $\mathbb{R}^3$, un repère doit être construit par **trois** vecteurs non colplanaires.

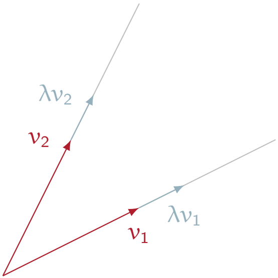


Figure: Illustration Repère $\mathbb{R}^2$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **alertbase** de E si:

- $\mathcal{B}$ est **générațrice**.
- $\mathcal{B}$ est **libre**.

Base

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **alertbase** de E si:

- $\mathcal{B}$ est **génératrice**.
- $\mathcal{B}$ est **libre**.

Théorème

Si $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Alors tout vecteur de $u \in E$ s'exprime de façon **unique** comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \tag{22}$$

1. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent des **coordonées** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.
2. L'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \end{array}$$

   est un **isomorphisme** entre $\mathbb{K}^n$ et E.

Exemples (1)

Base Canonique

Dans $\mathbb{R}^2$, on note $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ la **base canonique**.

Exemples (1)

Base Canonique

Dans $\mathbb{R}^2$, on note $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ la **base canonique**.

Autre base de $\mathbb{R}^2$

On peut générer aussi une base de $\mathbb{R}^2$, en considéreant deux vecteurs **non colinéaires**. Par exemple soient $v_1 = (3, 1)$ et $v_2 = (1, 2)$. Alors (v_1, v_2) forme un base de $\mathbb{R}^2$.

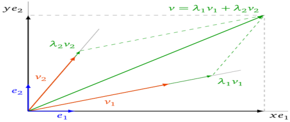


Figure: Illustration base $\mathbb{R}^2$

Base canonique $\mathbb{R}^3$

On peut aussi donner la base cannonique dans $\mathbb{R}^3$ par $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.

Exemple (2)

Base non coplanaires

Soit $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 9, 0)$ et $v_3 = (3, 3, 4)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **Génératrice**: Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & x \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 & = & z \end{cases}$$

- **Libre** Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Base canonique $\mathbb{R}^n$

Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment la base **canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Exemples (3)

Base canonique $\mathbb{R}^n$

Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment la base **canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Base polynômiale

Une base des polynomes de degré n est donnée par:

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$$

Libre à Base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille **génératrice**.
Toute famille **libre** $\mathcal{L}$ peut être **étendue** à un base.

i.e trouver une famille $\mathcal{F}$ tel que

$$\mathcal{L} \cup \mathcal{F} \text{ est une base}$$

Base incomplète

Libre à Base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille **génératrice**.
Toute famille **libre** $\mathcal{L}$ peut être **étendue** à un base.

i.e trouver une famille $\mathcal{F}$ tel que

$$\mathcal{L} \cup \mathcal{F} \text{ est une base}$$

Génératrice à Base

Toute famille **génératrice** $\mathcal{L}$ peut être **réduite** à une base.

i.e Trouver $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ tel que $\mathcal{B}$ est une base.

Mini Exercice

1. Soient les vecteurs $v_1 = (-1, -3)$, $v_2 = (3, 3)$, $v_3 = (0, 0)$, $v_4 = (2, 0)$ et $v_5 = (2, 6)$.
   - Démontrer que $G = (v_1, \ldots, v_5)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
   - Extraire une base de G.
2. Déterminer une base du sous espace vectoriel E_1 de $\mathbb{R}^3$ d'équation:

$$x + 3y - 2z = 0$$

   - Compléter cette base dans $\mathbb{R}^3$.
3. Même question pour E_2 vérifiant les équations:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ y &= z \end{aligned}$$

Définition

Un espace vectoriel E admettant une base de cardinal fini est dit de **dimension finie**.

Définition

Un espace vectoriel $\mathbb{E}$ admettant une base de cardinal fini est dit de **dimension finie**.

Théorème

Toutes les bases d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de **dimension finie** ont le même **cardinal**.

Définition

Un espace vectoriel E admettant une base de cardinal fini est dit de **dimension finie**.

Théorème

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de **dimension finie** ont le même **cardinal**.

Définition

Ainsi la **dimension**, notée $\dim E$, d'un espace vectoriel est par définition le cardinal de l'une de ces bases.

Exemples

1. Puisque $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

2. De même

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

3. La dimension de l'espace des polynomes de degré n est $n+1$.

$$\mathcal{B} = \left\{1, X, X^2, \dots, X^n\right\}$$

4. $\mathbb{R}[X]$ **n'est pas de dimension finie**.
5. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ **n'est pas de dimension finie**.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathrm{G} \tag{23}$$

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathrm{G} \tag{23}$$

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\mathrm{Card}\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathrm{G} \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\mathbf{n}$

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\operatorname{Card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathrm{G} \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\mathbf{n}$

1. Toute famille libre de E à **au plus** n éléments.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\operatorname{Card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card} G \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

1. Toute famille libre de E à **au plus** n éléments.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\operatorname{Card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card} G \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

1. Toute famille libre de E à **au plus** n éléments.
2. Toute famille génératrice de E à **au moins** n éléments.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\operatorname{Card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card} G \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

1. Toute famille libre de E à **au plus** n éléments.
2. Toute famille génératrice de E à **au moins** n éléments.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\operatorname{Card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{Card} G \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\mathbf{n}$

1. Toute famille libre de E à **au plus** n éléments.
2. Toute famille génératrice de E à **au moins** n éléments.

théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs. Alors on as l'équivalence

Complément

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Card}\,G \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\mathbf{n}$

1. Toute famille libre de E à **au plus** n éléments.
2. Toute famille génératrice de E à **au moins** n éléments.

théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs. Alors on as l'équivalence

1. $\mathcal{F}$ est une base.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Card}\,G \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

1. Toute famille libre de E à **au plus** n éléments.
2. Toute famille génératrice de E à **au moins** n éléments.

théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs. Alors on as l'équivalence

1. $\mathcal{F}$ est une base.
2. $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel. Soit G une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre alors:

$$\text{Card}\,\mathcal{L} \leqslant \text{Card}\,G \tag{23}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\mathbf{n}$

1. Toute famille libre de E à **au plus** n éléments.
2. Toute famille génératrice de E à **au moins** n éléments.

théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs. Alors on as l'équivalence

1. $\mathcal{F}$ est une base.
2. $\mathcal{F}$ est une famille libre.
3. $\mathcal{F}$ est une famille génératrice.

Question

Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs (v_1, v_2, v_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$?

$$v_1 = (1, 1, 4) \quad v_2 = (1, 3, t) \quad v_3 = (1, 1, t)$$

- Puisque on est dans $\mathbb{R}^3$ de dimension **3**, il suffit de démontrer que cette famille est soit libre soit génératrice.
- En pratique, il est simple de montrer qu'elle est libre.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ (t-4)\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous espace vectoriel F de E est de dimension finie.
2. $\dim \mathrm{F} \leqslant \dim \mathrm{E}$
3. $\mathrm{F} = \mathrm{E} \iff \dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$

Dimension sous espace vectoriel

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous espace vectoriel F de E est de dimension finie.
2. $\dim F \leqslant \dim E$
3. $F = E \iff \dim F = \dim E$

Théorème des quatre dimensions

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \tag{24}$$

Corollaire

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$