Groupes

A.Belcaid

Université Euro Méditerranéenne de Fès

December 12, 2020

Définition

Une **polynôme** à coéfficients dans $\mathbb{K}$ est expression de la forme:

$$P(x) = a_n x^n \; + \; a_{n-1} x^{n-1} \; + \ldots \; + \; a_1 x \; + a_0 \qquad (1)$$

avec $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$,

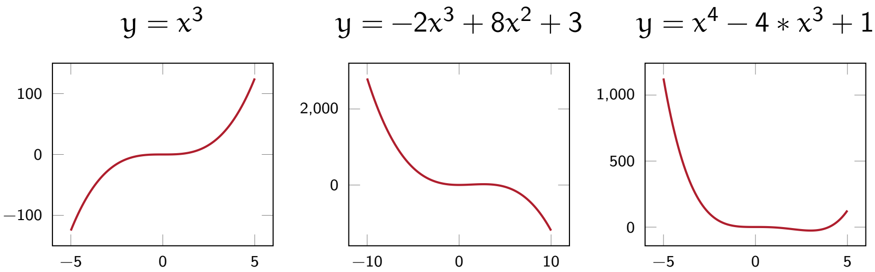

Figure: Exemples de polynômes

Noations

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Si **tous les coefficients** sont **nuls**, alors P est appelé **polynôme nul** et il est noté $\mathbf{0}$.

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Si **tous les coefficients** sont **nuls**, alors P est appelé **polynôme nul** et il est noté $\mathbf{0}$.
- Le **degré** d'un polynôme, note $\deg P$, est le plus **grand** entier n tel que a_n est non nul.

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Si **tous les coefficients** sont **nuls**, alors P est appelé **polynôme nul** et il est noté $\mathbf{0}$.
- Le **degré** d'un polynôme, note $\deg P$, est le plus **grand** entier n tel que a_n est non nul.
- Par convention, on note le degré du polynôme nul par: $\deg(0) = -\infty$

Notation

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Si **tous les coefficients** sont **nuls**, alors P est appelé **polynôme nul** et il est noté $\mathbf{0}$.
- Le **degré** d'un polynôme, note $\deg P$, est le plus **grand** entier n tel que a_n est non nul.
- Par convention, on note le degré du polynôme nul par: $\deg(0) = -\infty$
- Un polynôme de degré 0 s'écrit comme $P(x) = a_0$ est appelé un **polynôme constant**.

Notation

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Si **tous les coefficients** sont **nuls**, alors P est appelé **polynôme nul** et il est noté $\mathbf{0}$.
- Le **degré** d'un polynôme, note $\deg P$, est le plus **grand** entier n tel que a_n est non nul.
- Par convention, on note le degré du polynôme nul par: $deg(0) = -\infty$
- Un polynôme de degré 0 s'écrit comme $P(x) = a_0$ est appelé un **polynôme constant**.

Exemples

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Si **tous les coefficients** sont **nuls**, alors P est appelé **polynôme nul** et il est noté $\mathbf{0}$.
- Le **degré** d'un polynôme, note $\deg P$, est le plus **grand** entier n tel que a_n est non nul.
- Par convention, on note le degré du polynôme nul par: $\deg(0) = -\infty$
- Un polynôme de degré 0 s'écrit comme $P(x) = a_0$ est appelé un **polynôme constant**.

Exemples

1. $P(x) = 2x^3 - 1$.

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Si **tous les coefficients** sont **nuls**, alors P est appelé **polynôme nul** et il est noté $\mathbf{0}$.
- Le **degré** d'un polynôme, note $\deg P$, est le plus **grand** entier n tel que a_n est non nul.
- Par convention, on note le degré du polynôme nul par: $deg(0) = -\infty$
- Un polynôme de degré 0 s'écrit comme $P(x) = a_0$ est appelé un **polynôme constant**.

Exemples

1. $P(x) = 2x^3 - 1.$
2. $P(x) = x^4 - 3x^2 + 4.$

Noations

- L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Si **tous les coefficients** sont **nuls**, alors P est appelé **polynôme nul** et il est noté $\mathbf{0}$.
- Le **degré** d'un polynôme, note $\deg P$, est le plus **grand** entier n tel que a_n est non nul.
- Par convention, on note le degré du polynôme nul par: $deg(0) = -\infty$
- Un polynôme de degré 0 s'écrit comme $P(x) = a_0$ est appelé un **polynôme constant**.

Exemples

1. $P(x) = 2x^3 - 1$.
2. $P(x) = x^4 - 3x^2 + 4$.
3. $P(x) = 100$.

Égalité

Soient deux polynômes $P = \sum_i^n a_i x^i$ et $Q = \sum_i^n b_i x^i$.

L'**égalité** entre P et Q implique l'égalité entre **tous** les coefficients de P et Q.

$$P = Q \iff a_i = b_i \quad \forall i \in [0, n] \tag{2}$$

Égalité

Soient deux polynômes $P = \sum_i^n a_i x^i$ et $Q = \sum_i^n b_i x^i$.

L'**égalité** entre P et Q implique l'égalité entre **tous** les coefficients de P et Q.

$$P = Q \iff a_i = b_i \quad \forall i \in [0, n] \tag{2}$$

Addition

Soit un polynôme $P = \sum_i^n a_i x^i$ de degré n et un polynôme $Q = \sum_i^m a_i x^i$ de degré m.

La **somme** $P + Q$ est aussi un polynôme dont les coefficients sont donnés par:

$$(P + Q)(x) = \sum_i^{\max(n,m)} c_i x^i \quad \text{tel que} \quad c_i = a_i + b_i \tag{3}$$

Multiplication par un scalaire

Soit $P(x) = \sum_i a_i x^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ et λ un scalaire dans $\mathbb{K}$.

La multiplication de P par le scalaire λ est aussi un polynôme note λP dont les coefficients:

$$(\lambda P)(x) = \sum_i b_i x^i \quad \text{tel que} \;\; b_i = \lambda a_i \tag{4}$$

Multiplication par un scalaire

Soit $P(x) = \sum_i a_i x^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ et λ un scalaire dans $\mathbb{K}$.

La multiplication de P par le scalaire λ est aussi un polynôme note λP dont les coefficients:

$$(\lambda P)(x) = \sum_i b_i x^i \quad \text{tel que } b_i = \lambda a_i \tag{4}$$

Multiplication

Soit $P(x) = \sum_i^n a_i x^i$ un polynôme de degré n et $Q(x) = \sum_i^m b_i x^i$ un polynôme de degré m.

Le produit (PQ) est aussi un **polynôme** donné par la formule suivante:

$$(PQ)(x) = \sum_k^{n+m} c_k x^k \quad \text{tel que } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \tag{5}$$

Exemple

Soit le polynôme $P(X) = -5x^3 + 2x - 5$ et $Q(X) = -2x^2 + 9x$.

Exemple

Soit le polynôme $P(X) = -5x^3 + 2x - 5$ et $Q(X) = -2x^2 + 9x$.

1. Ese qu'on possède que $P = Q$.

Exemple

Soit le polynôme $P(X) = -5x^3 + 2x - 5$ et $Q(X) = -2x^2 + 9x$.

1. Ese qu'on possède que $P = Q$.
2. Calculer le polynôme $4P$.

Exemple

Soit le polynôme $P(X) = -5x^3 + 2x - 5$ et $Q(X) = -2x^2 + 9x$.

1. Ese qu'on possède que $P = Q$.
2. Calculer le polynôme $4P$.
3. Evaluler l'expression du polynôme $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$.

Exemple

Soit le polynôme $P(X) = -5x^3 + 2x - 5$ et $Q(X) = -2x^2 + 9x$.

1. Ese qu'on possède que $P = Q$.
2. Calculer le polynôme $4P$.
3. Evaluler l'expression du polynôme $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$.
4. Donner le **coefficient** de x^3 du polynôme $P \times Q$.

Proposition

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a alors:

Proposition

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a alors:

- $P + Q = Q + P$ Commutativité

Proposition

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a alors:

- $P + Q = Q + P$ Commutativité
- $P + 0 = P$ élement neutre

Proposition

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a alors:

- $P + Q = Q + P$ Commutativité
- $P + 0 = P$ élement neutre
- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ Associativité

Proposition

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a alors:

- $P + Q = Q + P$ Commutativité
- $P + 0 = P$ élement neutre
- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ Associativité
- $1.P = P$

Proposition

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a alors:

- $P + Q = Q + P$ Commutativité
- $P + 0 = P$ élement neutre
- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ Associativité
- $1.P = P$
- $P \times Q = Q \times P$.

Proposition

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a alors:

- $P + Q = Q + P$ Commutativité
- $P + 0 = P$ élement neutre
- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ Associativité
- $1.P = P$
- $P \times Q = Q \times P$.
- $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$

Propriétées

Proposition

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a alors:

- $P + Q = Q + P$ Commutativité
- $P + 0 = P$ élement neutre
- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ Associativité
- $1.P = P$
- $P \times Q = Q \times P$.
- $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$
- $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$

Propriété degré

Soient deux polynômes P et Q deux polynômes dans $\mathbb{K}$.

Degré Produit

$$\deg\left(P \times Q\right) = \deg P + \deg Q \tag{6}$$

Soient deux polynômes P et Q deux polynômes dans $\mathbb{K}$.

Degré Produit

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q \tag{6}$$

Degré Somme

$$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q) \tag{7}$$

Vocabulaire

Voici un vocabulaire additionnel sur les polynômes:

- Un polynôme contenant un **seul terme** de la forme $\mathbf{a_k x^k}$ $(a_k \neq 0)$ est appelé un **monôme**.

Voici un vocabulaire additionnel sur les polynômes:

- Un polynôme contenant un **seul terme** de la forme $\mathbf{a_k x^k}$ $(a_k \neq 0)$ est appelé un **monôme**.
- Pour un polynôme de la forme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, on appelle le **terme dominant** le monôme $a_n x^n$ et le coefficient a_n est appelé le **coefficient dominant**.

Voici un vocabulaire additionnel sur les polynômes:

- Un polynôme contenant un **seul terme** de la forme $\mathbf{a_k x^k}$ $(a_k \neq 0)$ est appelé un **monôme**.
- Pour un polynôme de la forme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, on appelle le **terme dominant** le monôme $a_n x^n$ et le coefficient a_n est appelé le **coefficient dominant**.
- En cas où le coefficient dominant est $\mathbf{1}$, on dit que le polynôme est **unitaire**.

Voici un vocabulaire additionnel sur les polynômes:

- Un polynôme contenant un **seul terme** de la forme $\mathbf{a_k x^k}$ $(a_k \neq 0)$ est appelé un **monôme**.
- Pour un polynôme de la forme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, on appelle le **terme dominant** le monôme $a_n x^n$ et le coefficient a_n est appelé le **coefficient dominant**.
- En cas où le coefficient dominant est 1, on dit que le polynôme est **unitaire**.

Exemples

Vocabulaire

Voici un vocabulaire additionnel sur les polynômes:

- Un polynôme contenant un **seul terme** de la forme $\mathbf{a_k x^k}$ $(a_k \neq 0)$ est appelé un **monôme**.
- Pour un polynôme de la forme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, on appelle le **terme dominant** le monôme $a_n x^n$ et le coefficient a_n est appelé le **coefficient dominant**.
- En cas où le coefficient dominant est $\mathbf{1}$, on dit que le polynôme est **unitaire**.

Exemples

- $P(x) = \underbrace{3x^4}_{\text{terme dominant}} + 4x^3 + \underbrace{2x^2}_{\text{monôme}} + 1$

Voici un vocabulaire additionnel sur les polynômes:

- Un polynôme contenant un **seul terme** de la forme $\mathbf{a_k x^k}$ $(a_k \neq 0)$ est appelé un **monôme**.
- Pour un polynôme de la forme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, on appelle le **terme dominant** le monôme $a_n x^n$ et le coefficient a_n est appelé le **coefficient dominant**.
- En cas où le coefficient dominant est $\mathbf{1}$, on dit que le polynôme est **unitaire**.

Exemples

- $P(x) = \underbrace{3x^4}_{\text{terme dominant}} + 4x^3 + \underbrace{2x^2}_{\text{monôme}} + 1$
- $P(x) = x^2 - 1.$

Mini Exercices 1

Soit $P(x) = 3x^3 - 2$, $Q(x) = x^2 + x - 1$ et $R(x) = ax + b$.

1. Calculer $P + Q$, $P \times Q$, $(P + Q) \times R$.
2. Donner a et b pour **minimiser** le degré de $P - QR$.
3. Montrer que $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q) = \max \deg P, \deg Q$.
4. Soit $P_1 = (X + 1)^4$,
   - Développer P_1.
   - Quel est son terme dominant? P_1
   - P_1 est il unitaire?

Division Euclidienne

Les opérations **arithmétiques** portent une grande **similarité** avec celle des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Par exemple on peut généraliser la notion de **division euclidienne**:

Division

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on dit que P **divise** Q et on note $\mathbf{P}|\mathbf{Q}$, s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que:

$$Q = P \times R \tag{8}$$

On dit aussi que Q est un **multiple** de P.

Division Euclidienne

Les opérations **arithmétiques** portent une grande **similarité** avec celle des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Par exemple on peut généraliser la notion de **division euclidienne**:

Division

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on dit que P **divise** Q et on note $\mathbf{P}|\mathbf{Q}$, s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que:

$$Q = P \times R \tag{8}$$

On dit aussi que Q est un **multiple** de P.

Relations communes

- $P|P$
- $1|P$
- $P|0$

Propriété

Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on a alors:

- $P|P$
- $P|Q$ et $Q|P$ alors **il existe** un réel $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = \lambda Q$.
- $(P|Q)$ et $(Q|R) \implies P|R$.
- Si $P|Q$ et $P\,|R$ alors $P \mid (\alpha \times Q + \beta \times R) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Théorème

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathrm{B} \neq 0$. Alors il existent deux polynômes **uniques** Q et R tel que:

$$A = \mathrm{Q} \times \mathrm{B} + \mathrm{R} \quad \text{tel que} \quad \deg \mathrm{R} < \deg \mathrm{B} \tag{9}$$

- L'écriture dans (9) est appelée **division euclidienne**.
- Q est appelé le **Quotient**.
- R est note le **Reste**.
- On remarque que si $\mathrm{R} = 0 \iff \mathrm{B} \mid A$.

Proposer une démonstration par récurrence sur le degré de A.

Méthode de calcul

- Calculer le résultat de la division euclidienne entre A et B pour les cas suivants:
  - $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$.

Exemples

Méthode de calcul

- Calculer le résultat de la division euclidienne entre A et B pour les cas suivants:
  - $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -x^3 & -2x^2 & +3x & -1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 + x - 3 \\
\cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & +3x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
 & & -3x^2 & +2x & -1 & \\
 & & 3x^2 & -3x & +3 & \\
\cline{3-5}
 & & & -x & +2 &
\end{array}
$$

Méthode de calcul

- Calculer le résultat de la division euclidienne entre A et B pour les cas suivants:
    - $A = X^4 - 3X^3 + X + 1$ et $B = X^2 + 2$.

Exemples

Méthode de calcul

- Calculer le résultat de la division euclidienne entre A et B pour les cas suivants:
  - $A = X^4 - 3X^3 + X + 1$ et $B = X^2 + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & & +x & +1 & x^2+2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & & -2x^2 & & & x^2-3x-2 \\
\cline{1-3}
 & -3x^3 & -2x^2 & +x & & \\
 & 3x^3 & & +6x & & \\
\cline{2-4}
 & & -2x^2 & +7x & +1 & \\
 & & 2x^2 & & +4 & \\
\cline{3-5}
 & & & 7x & +5 &
\end{array}
$$

Définition

Pour deux polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, avec $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Il existe alors un **unique** polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois P et Q.

Définition

Pour deux polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, avec $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Il existe alors un **unique** polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois P et Q.

- Cet unique polynôme est appelé **pgcd** (plus grand commun diviseur) et il est noté $\mathrm{pgcd}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Définition

Pour deux polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, avec $\mathrm{P} \neq 0$ et $\mathrm{Q} \neq 0$. Il existe alors un **unique** polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois P et Q.

- Cet unique polynôme est appelé **pgcd** (plus grand commun diviseur) et il est noté pgcd$(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Définition

Pour deux polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, avec $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Il existe alors un **unique** polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois P et Q.

- Cet unique polynôme est appelé **pgcd** (plus grand commun diviseur) et il est noté pgcd$(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Remarques

Définition

Pour deux polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, avec $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Il existe alors un **unique** polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois P et Q.

- Cet unique polynôme est appelé **pgcd** (plus grand commun diviseur) et il est noté $\text{pgcd}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Remarques

- $\text{pgcd}(P, Q)$ est un polynôme **unitaire**.

PGCD

Définition

Pour deux polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, avec $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Il existe alors un **unique** polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois P et Q.

- Cet unique polynôme est appelé **pgcd** (plus grand commun diviseur) et il est noté $\text{pgcd}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Remarques

- $\text{pgcd}(P, Q)$ est un polynôme **unitaire**.
- Si $P \mid Q$ et $P \neq 0$ alors $\text{pgcd}(P, Q) = \frac{1}{a_n} P$ où $\mathbf{a_n}$ est le coefficient dominant de P.

Définition

Pour deux polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, avec $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Il existe alors un **unique** polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois P et Q.

- Cet unique polynôme est appelé **pgcd** (plus grand commun diviseur) et il est noté $\text{pgcd}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

Remarques

- $\text{pgcd}(P, Q)$ est un polynôme **unitaire**.
- Si $P \mid Q$ et $P \neq 0$ alors $\text{pgcd}(P, Q) = \frac{1}{a_n} P$ où $\mathbf{a_n}$ est le coefficient dominant de P.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a:

$$\text{pgcd}(P, Q) = \text{pgcd}(\lambda P, Q) \tag{10}$$

Algorithme d'Euclide

Vous avez appris en arithmétique dans $\mathbb{Z}$ que:

$$\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r) \tag{11}$$

où r est le reste de la division euclidienne de a et b.

La génération de cet algorithme s'applique aussi aux **polynômes** ainsi on a:

Algorithme Euclide (version polynôme)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et (Q, R) le résultat de la division euclidienne de A par B (i.e $A = Q \times B + R$). Alors on a:

Algorithme d'Euclide

Vous avez appris en arithmétique dans $\mathbb{Z}$ que:

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r) \tag{11}$$

où r est le reste de la division euclidienne de a et b.

La génération de cet algorithme s'applique aussi aux **polynômes** ainsi on a:

Algorithme Euclide (version polynôme)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et (Q, R) le résultat de la division euclidienne de A par B (i.e $A = Q \times B + R$). Alors on a:

$$\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R) \tag{12}$$

Exemple

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le **pgcd** des deux polynômes:

- $A = X^4 - 1.$
- $B = X^3 - 1.$

$$x^4 - 1 = \left(x^3 - 1\right) \cdot x + \left(x - 1\right)$$
$$x^3 - 1 = \left(x - 1\right) \cdot \left(x^2 + x + 1\right) + 0$$

Exemple

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le **pgcd** des deux polynômes:

- $A = X^4 - 1.$
- $B = X^3 - 1.$

$$x^4 - 1 = (x^3 - 1) \cdot x + (x - 1)$$
$$x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) + 0$$

- **Conclusion:** Le pgcd est le dernier reste **non nul**. Alors

$$\mathrm{pgcd}(x^4 - 1, x^3 - 1) = \mathbf{x - 1}$$

.

Exemple de calcul

Exemple

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le **pgcd** des deux polynômes:

- $A = X^3 - 2X^2 + 3.$
- $B = X^2 - 1.$

Exemple

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le **pgcd** des deux polynômes:

- $A = X^3 - 2X^2 + 3$.
- $B = X^2 - 1$.

$$x^3 - 2x^2 + 3 = \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x - 2\right) + \left(x + 1\right)$$
$$x^2 - 1 = \left(x + 1\right) \cdot \left(x - 1\right) + 0$$

Exemple

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le **pgcd** des deux polynômes:

- $A = X^3 - 2X^2 + 3$.
- $B = X^2 - 1$.

$$x^3 - 2x^2 + 3 = \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x - 2\right) + \left(x + 1\right)$$
$$x^2 - 1 = \left(x + 1\right) \cdot \left(x - 1\right) + 0$$

- **Conclusion:** Le pgcd est le dernier reste **non nul**. Alors

$$\text{pgcd}(x^3 - 2x^2 + 3, x^2 - 1) = \mathbf{x + 1}$$

.

Définition

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que les P et Q sont **premiers** entre eux si

$$\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$$

Définition

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que les P et Q sont **premiers** entre eux si

$$\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$$

Remarque

Pour deux polynômes quelconque, P et Q (qui ne sont forcément premiers entre eux). On peut construire deux polynômes $P^{'}$ et $Q^{'}$ qui sont premiers entre eux. Il suffit de calculer le **pgcd**(P,Q).

$$K = \mathrm{pgcd}(P, Q) \implies \begin{array}{l} P = K \times P^{'} \\ Q = K \times Q^{'} \end{array} \tag{13}$$

Alors forcément $P^{'}$ et $Q^{'}$ sont premiers entre eux.

Théorème

Soient P et Q deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$ and $Q \neq 0$. Soit alors $D = \mathrm{pgcd}(P, Q)$ leur pgcd. Alors il exisent deux polynômes U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tel que:

$$PU + QV = K \tag{14}$$

Théorème

Soient P et Q deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$ and $Q \neq 0$. Soit alors $D = \text{pgcd}(P, Q)$ leur pgcd. Alors il exisent deux polynômes U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tel que:

$$P\mathbf{U} + Q\mathbf{V} = K \tag{14}$$

- La preuve découle directement en remontant l'algorithme d'Euclide.

Théorème

Soient P et Q deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$ and $Q \neq 0$. Soit alors $D = \text{pgcd}(P, Q)$ leur pgcd. Alors il exisent deux polynômes U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tel que:

$$PU + QV = K \tag{14}$$

- La preuve découle directement en remontant l'algorithme d'Euclide.

Corollaire

Si P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ sont **premiers entre eux**. alors il exisent deux polynômes U et V tel que:

$$PU + QV = 1 \tag{15}$$

Corollaire

Soient P, Q et R tel que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors on a la propriété suivante:

$$R \mid P \quad \text{et} \quad R \mid Q \implies R \mid \text{pgcd}(P, Q) \tag{16}$$

Corollaire

Soient P, Q et R tel que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors on a la propriété suivante:

$$R \mid P \quad \text{et} \quad R \mid Q \implies R \mid \text{pgcd}(P, Q) \tag{16}$$

Corollaire

Soient P, Q et R tel que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors on a la propriété suivante:

$$R \mid P \quad \text{et} \quad R \mid Q \implies R \mid \operatorname{pgcd}(P, Q) \tag{16}$$

Corollaire

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors

$$P \mid QR \quad \text{et} \quad \operatorname{pgcd}(P, Q) = 1 \implies P \mid R \tag{17}$$

PPCM

Définition

Soit P, Q deux polynômes **non nuls** de $\mathbb{K}[X]$, alors il existe un **unique** polynôme $\mathbf{M}$ **unitaire** de plus petit degré tel que:

$$P \mid M \quad \text{et} \quad Q \mid M$$

. Le polynôme M est appelé le **ppcm** (plus petit commun multiple) et noté $\text{ppcm}(P, Q)$.

Définition

Soit P, Q deux polynômes **non nuls** de $\mathbb{K}[X]$, alors il existe un **unique** polynôme $\mathbf{M}$ **unitaire** de plus petit degré tel que:

$$P \mid M \quad \text{et} \quad Q \mid M$$

. Le polynôme M est appelé le **ppcm** (plus petit commun multiple) et noté $\text{ppcm}(P, Q)$.

Exemple

- Donner le **ppcm** de:
  1. $P = x^2(x-2)^2(x^2+1)^4$.
  2. $Q = (x+1)(x-2)^3(x^2+1)^3$.

Propriété PPCM

Remarque

Le **ppcm** est le plus petit des polynômes qui vérifie cette propriété. Ainsi:

$$P \mid M \quad Q \mid M \implies \text{ppcm}(P, Q) \mid M \tag{18}$$

Mini exercices

1. Donner les diviseurs de $P(x) = X^4 + 2X^2 + 1$.
2. Montrer que $(X - 1)$ divise $X^n - 1$ (pour $n \geqslant 1$).
3. Calculer les divisions euclidienne des polynomes suivants:
   - $P(X) = X^4 - 1$ et $Q(X) = X^3 - 1$.
   - $P(X) = 4X^3 + 2X^2 - X - 5$ et $Q(X) = X^2 + X$.
4. Déterminer les pgcd de $P(X) = X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $Q(X) = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3$.
   - Trouver les polynômes U et V de Bézout

Définition

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** de $\mathbf{P}$ si:

$$\mathrm{P}(\alpha) = 0 \tag{19}$$

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** de $\mathbf{P}$ si:

$$P(\alpha) = 0 \tag{19}$$

Proposition

$$P(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (X - \alpha) \text{ divise } P \tag{20}$$

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** de $\mathbf{P}$ si:

$$P(\alpha) = 0 \tag{19}$$

Proposition

$$P(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (X - \alpha) \text{ divise } P \tag{20}$$

- **Preuve** : Appliquer la division euclidienne de P par $X - \alpha$.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, La dérivée de P est aussi un polynôme dont l'expression est donnée par:

$$\begin{aligned} P^{'}(X) &= na_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \ldots + 2a_2 X + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k a_k \, X^{k-1} \end{aligned}$$

Définition

Soit α une **racine** du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que α est de **multiplicité** $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ si k est le plus grand entier tel que:

$$(X - \alpha)^{k} \text{ divise } P \tag{21}$$

- Si $k = 1$, on parle d'une racine **simple**.
- Si $k = 2$, on dit que la racine est **double**.
- D'une manière générale, on dit que la racine est **d'ordre** k

Définition

Soit α une **racine** du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que α est de **multiplicité** $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ si k est le plus grand entier tel que:

$$(X-\alpha)^k \text{ divise } P \tag{21}$$

- Si $k = 1$, on parle d'une racine **simple**.
- Si $k = 2$, on dit que la racine est **double**.
- D'une manière générale, on dit que la racine est **d'ordre** k

Proposition

On démontre **l'équivalence** entre les propriétés suivantes:

1. α est une racine d'ordre k de P.
2. il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que: $P = (X-\alpha)^k Q \quad$ avec: $Q(\alpha) = 0$
3. $\forall k \in 0, \ldots, k-1 \quad P^k(\alpha) = 0$ et $P^k(\alpha) \neq 0$.

Théorème

Tout polynôme à **coefficients complexes** de degré $n \geqslant 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Si on compte chaque racine avec son **degré**, alors il admet exactement n racines.

Théorème

Tout polynôme à **coefficients complexes** de degré $n \geqslant 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Si on compte chaque racine avec son **degré**, alors il admet exactement n racines.

Exemple

Pour un polynôme de deuxième degré $P(X) = aX^2 + bX + c$ à coefficients réels: $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$

1. $\Delta > 0 \implies x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. $\Delta < 0 \implies x_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$
3. $\Delta = 0$ une seule racine **double** $x = \dfrac{-b}{2a}$.

- Pour des corps différent des **nombres complexes**, nous avons un résultat **plus faible**:

Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, alors P admet **au plus** n racines dans $\mathbb{K}$.

- Pour des corps différent des **nombres complexes**, nous avons un résultat **plus faible**:

Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, alors P admet **au plus** n racines dans $\mathbb{K}$.

Exemple

Soit le polynôme $P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$.
Ce polynôme peut être ecrit comme : $P(X) = 3(X - \frac{2}{3}(X^2 + 2))$

- On peut remarquer qu'il n'admet qu'une seule racine de $\mathbb{R}$, $\alpha = \frac{2}{3}$.
- Or, dans $\mathbb{C}$ il admet **trois** racines $\left\{\frac{2}{3}, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}\right\}$

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ est dit **irréductible** si pour chaque $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P alors on a:

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ est dit **irréductible** si pour chaque $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P alors on a:

- $Q \in \mathbb{K}^*$ (Q est une constant).

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ est dit **irréductible** si pour chaque $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P alors on a:

- $Q \in \mathbb{K}^*$ (Q est une constant).
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ est dit **irréductible** si pour chaque $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P alors on a:

- $Q \in \mathbb{K}^*$ (Q est une constant).
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ est dit **irréductible** si pour chaque $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P alors on a:

- $Q \in \mathbb{K}^*$ (Q est une constant).
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Remarques

Polynômes irréductibles

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ est dit **irréductible** si pour chaque $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P alors on a:

- $Q \in \mathbb{K}^*$ (Q est une constant).
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Remarques

1. Les seuls diviseurs d'un polynôme irréductible sont des **constantes**, soit **lui-même**(à une constante près).

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ est dit **irréductible** si pour chaque $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P alors on a:

- $Q \in \mathbb{K}^*$ (Q est une constant).
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Remarques

1. Les seuls diviseurs d'un polynôme irréductible sont des **constantes**, soit **lui-même**(à une constante près).
2. La notion de polynôme irréductible remplace celle des nombres **premiers** dans $\mathbb{Z}$.

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ est dit **irréductible** si pour chaque $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P alors on a:

- $Q \in \mathbb{K}^*$ (Q est une constant).
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Remarques

1. Les seuls diviseurs d'un polynôme irréductible sont des **constantes**, soit **lui-même**(à une constante près).
2. La notion de polynôme irréductible remplace celle des nombres **premiers** dans $\mathbb{Z}$.
3. Dans le cas où P est **réductible**, on peut alors le factoriser comme produit de deux polynômes (ou plus)

$$P = AB \quad \text{où} \quad \deg A \geqslant 1 \text{ et } \deg B \geqslant 1. \tag{22}$$

Exemple

Exemple

- Tous les polynômes de degré 1 sont forcément **irréductible**.

Exemple

- Tous les polynômes de degré 1 sont forcément **irréductible**.
- $X^2 - 1$ est réductible car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$

Exemple

- Tous les polynômes de degré 1 sont forcément **irréductible**.
- $X^2 - 1$ est réductible car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$
- $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple

- Tous les polynômes de degré 1 sont forcément **irréductible**.
- $X^2 - 1$ est réductible car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$
- $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- Cependant, il est **réductible** dans $\mathbb{C}[X]$ car

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i) \tag{23}$$

Exemple

- Tous les polynômes de degré 1 sont forcément **irréductible**.
- $X^2 - 1$ est réductible car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$
- $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- Cependant, il est **réductible** dans $\mathbb{C}[X]$ car

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i) \tag{23}$$

Polynômes irréductibles

Exemple

- Tous les polynômes de degré 1 sont forcément **irréductible**.
- $X^2 - 1$ est réductible car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$
- $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- Cependant, il est **réductible** dans $\mathbb{C}[X]$ car

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i) \tag{23}$$

Lemme d'Euclide

Pour un polynôme **irréductible** $P \in \mathbb{K}[X]$, et $A, B \in \mathbb{K}[X]$ on a:

$$P \mid AB \implies P \mid A \quad \text{ou} \quad P \mid B \tag{24}$$

Théorème

tout polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ se factorise en produit de polynômes irréductibles:

$$P = \lambda P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_m^{r_m} = \lambda \prod_{k=1}^{m} P_k^{r_k} \tag{25}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $r_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont **réductibles**.

Théorème

tout polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ se factorise en produit de polynômes irréductibles:

$$P = \lambda P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_m^{r_m} = \lambda \prod_{k=1}^{m} P_k^{r_k} \tag{25}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $r_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont **réductibles**.

Théorème

tout polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ se factorise en produit de polynômes irréductibles:

$$P = \lambda P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_m^{r_m} = \lambda \prod_{k=1}^{m} P_k^{r_k} \tag{25}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $r_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont **réductibles**.

Corollaire

Théorème

tout polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ se factorise en produit de polynômes irréductibles:

$$P = \lambda P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_m^{r_m} = \lambda \prod_{k=1}^{m} P_k^{r_k} \tag{25}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $r_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont **réductibles**.

Corollaire

- Les seuls polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Théorème

tout polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ se factorise en produit de polynômes irréductibles:

$$P = \lambda P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_m^{r_m} = \lambda \prod_{k=1}^{m} P_k^{r_k} \tag{25}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $r_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont **réductibles**.

Corollaire

- Les seuls polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
- Pour un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, la factorisation s'écrit comme:

$$P = \lambda(X - \alpha_1)^{k_1}(X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_r)^{k_r} \tag{26}$$

Factorisation dans $\mathbb{C}$

Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Ainsi tout polynôme est décompose selon la forme suivante:

$$P(X) = \lambda \left(X - \alpha_1\right)^{r_1} \left(X - \alpha_2\right)^{r_2} \dots \left(X - \alpha_k\right)^{r_k} \tag{27}$$

où les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont les **racines** de P et les r_i leurs degré de **multiplicité**.

Factorisation dans $\mathbb{C}$

Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Ainsi tout polynôme est décompose selon la forme suivante:

$$P(X) = \lambda (X - \alpha_1)^{r_1} (X - \alpha_2)^{r_2} \dots (X - \alpha_k)^{r_k} \tag{27}$$

où les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont les **racines** de P et les r_i leurs degré de **multiplicité**.

Décomposition dans $\mathbb{R}$

Malheureusement, on as pas cette décomposition puisque un polynôme de degré $\geqslant 2$ peut aussi être **irréductible**. Ainsi obtient une décomposition plus faible:

$$P(X) = \lambda (X - \alpha_1)^{r_1} (X - \alpha_2)^{r_2} \dots (X - \alpha_k)^{r_k} Q_1^{l_1} \dots Q_m^{l_m} \tag{28}$$

où comme dans $\mathbb{C}$, les α_i sont les racines, en plus $(Q_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont des polynômes irréductibles.

Exemple 1

On considère le polynôme $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$.

- Peut on décomposer le polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.
- Exprimer les α_i, r_i, Q_i et l_i selon l'expression (28).
- Décomposer ce polynôme dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1

On considère le polynôme $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$.

- Peut on décomposer le polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.
- Exprimer les α_i, r_i, Q_i et l_i selon l'expression (28).
- Décomposer ce polynôme dans $\mathbb{C}$.

Mini Exercice

- Trouver le polynôme (de degré minimal), tel que $\frac{1}{2}$ est une racine simple, $\sqrt{2}$ est une racine double de ce polynôme, et i est une racine triple.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si P admet une racine double, alors P et P' ne sont pas **premiers** entre eux.
- Factoriser le polynôme $Q(X) = 3(X^2-1)(X^2-X+\frac{1}{4})$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Définition

On appelle une **fraction continue** dans $\mathbb{K}[X]$ une expression de la forme:

$$F = \frac{P}{Q} \tag{29}$$

où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$.

Définition

On appelle une **fraction continue** dans $\mathbb{K}[X]$ une expression de la forme:

$$F = \frac{P}{Q} \tag{29}$$

où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$.

Exemples

1. $F_1(X) = \dfrac{X^2+1}{3X^2-2X+1}$.
2. $F_2(X) = \dfrac{X-1}{X^2-1}$.
3. $F_3(X) = \dfrac{X^2-1}{(X^2+2X+1}$.

Décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction continue tel que:

Alors F peut se décomposer en éléments simples d'une manière **unique** comme suit:

$$F = E + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}}_{\text{Somme racines}} \underbrace{\sum_{j=0}^{r_k-1}}_{\text{Somme degré}} \frac{a_{ij}}{(X-\alpha_i)^{r_i-j}} \tag{30}$$

Décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction continue tel que:

- $\text{pgcd}(P, Q) = 1$

Alors F peut se décomposer en éléments simples d'une manière **unique** comme suit:

$$F = E + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}}_{\text{Somme racines}} \underbrace{\sum_{j=0}^{r_k - 1}}_{\text{Somme degré}} \frac{a_{ij}}{(X - \alpha_i)^{r_i - j}} \tag{30}$$

Décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction continue tel que:

- $\text{pgcd}(P, Q) = 1$
- $Q = (X - \alpha_1)^{r_1}(X - \alpha_2)^{r_2} \dots (X - \alpha_k)^{r_k}$

Alors F peut se décomposer en éléments simples d'une manière **unique** comme suit:

$$F = E + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}}_{\text{Somme racines}} \underbrace{\sum_{j=0}^{r_k - 1}}_{\text{Somme degré}} \frac{a_{ij}}{(X - \alpha_i)^{r_i - j}} \tag{30}$$

Décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction continue tel que:

- $\text{pgcd}(P, Q) = 1$
- $Q = (X - \alpha_1)^{r_1}(X - \alpha_2)^{r_2} \dots (X - \alpha_k)^{r_k}$

Alors F peut se décomposer en éléments simples d'une manière **unique** comme suit:

$$F = E + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}}_{\text{Somme racines}} \underbrace{\sum_{j=0}^{r_k - 1}}_{\text{Somme degré}} \frac{a_{ij}}{(X - \alpha_i)^{r_i - j}} \tag{30}$$

- E s'appelle la **partie polynomiale**.

Décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction continue tel que:

- $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$
- $Q = (X - \alpha_1)^{r_1}(X - \alpha_2)^{r_2} \dots (X - \alpha_k)^{r_k}$

Alors F peut se décomposer en éléments simples d'une manière **unique** comme suit:

$$F = E + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}}_{\text{Somme racines}} \underbrace{\sum_{j=0}^{r_k - 1}}_{\text{Somme degré}} \frac{a_{ij}}{(X - \alpha_i)^{r_i - j}} \tag{30}$$

- E s'appelle la **partie polynomiale**.
- $\dfrac{a_{ij}}{(X - \alpha_i)^j}$ sont les **éléments simples**.

Exemple 1

Soit la fraction $F(X) = \dfrac{1}{X^2+1}$.

Vérifier alors que:

$$F(X) = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i} \quad \text{où } a = \frac{1}{2}i \text{ et } b = -\frac{1}{2}i \tag{31}$$

Exemple 1

Soit la fraction $F(X) = \dfrac{1}{X^2+1}$.

Vérifier alors que:

$$F(X) = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i} \quad \text{où } a = \frac{1}{2}i \text{ et } b = -\frac{1}{2}i \tag{31}$$

Exemple 1

Soit la fraction $F(X) = \dfrac{1}{X^2+1}$.

Vérifier alors que:

$$F(X) = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i} \quad \text{où } a = \frac{1}{2}i \text{ et } b = -\frac{1}{2}i \tag{31}$$

Exemple 2

Soit la fraction $F(X) = \dfrac{X^4 - 8X^2 + 9X - 7}{(X-2)^2(X+3)}$.

Exemple décomposition

Exemple 1

Soit la fraction $F(X) = \frac{1}{X^2+1}$.

Vérifier alors que:

$$F(X) = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i} \quad \text{où } a = \frac{1}{2}i \text{ et } b = -\frac{1}{2}i \tag{31}$$

Exemple 2

Soit la fraction $F(X) = \frac{X^4 - 8X^2 + 9X - 7}{(X-2)^2(X+3)}$.

- Vérifier que:

$$F(X) = X + 1 + \frac{-1}{(X-2)^2} + \frac{2}{(X-2)} + \frac{-1}{(X+3)} \tag{32}$$

Méthode de calcul

Méthode de calcul

1. Calculer la division euclidienne de P par Q.

Méthode de calcul

1. Calculer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer la partie polynomiale de cette division.

Méthode de calcul

1. Calculer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer la partie polynomiale de cette division.
3. Factoriser le dénominateur Q en facteur irréductibles.

Méthode de calcul

1. Calculer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer la partie polynomiale de cette division.
3. Factoriser le dénominateur Q en facteur irréductibles.
4. Ecrire la formule générale de la décomposition.

Méthode de calcul

1. Calculer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer la partie polynomiale de cette division.
3. Factoriser le dénominateur Q en facteur irréductibles.
4. Ecrire la formule générale de la décomposition.
5. Utiliser **l'égalité polynomiale** pour calculer les résultats.

Exemple détaillé (1)

Exemple

Décomposer la faction:

$$F(X) = \frac{P}{Q} = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2} \tag{33}$$

Exemple

Décomposer la faction:

$$F(X) = \frac{P}{Q} = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2} \tag{33}$$

Solution

1. **Division euclidienne**

$$X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11 = \underbrace{(X^2 + 1)}_{E} Q(X) + 2X^2 - 5X + 9. \tag{34}$$

Exemple

Décomposer la faction:

$$F(X) = \frac{P}{Q} = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2} \tag{33}$$

Solution

1. **Division euclidienne**

$$X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11 = \underbrace{(X^2 + 1)}_{E} Q(X) + 2X^2 - 5X + 9. \tag{34}$$

2. **Décomposition de Q**: on peut vérifier que Q admet deux racines 1 et -2.

$$Q(X) = (X - 1)^2 (X + 2) \tag{35}$$

1. **Ecriture théorique**:

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{X+2} \qquad (36)$$

1. **Ecriture théorique**:

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{X+2} \tag{36}$$

Exemple détaillé (2)

1. **Ecriture théorique**:

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{X+2} \tag{36}$$

2. **Détermination de coefficients**

$$\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{X+2} = \frac{(b+c)X^2 + (a+b+c)X + 2a - 2b + c}{(X-1)^2(X+2)} \tag{37}$$

L'expression en (37) doit être égale à $\dfrac{2X^2 - 5X + 9}{(X-1)^2(X+2)}$

On conclut alors que

$$\begin{cases} b + c & = & 2 \\ a + b + c & = & -5 \\ 2a - 2b + c & = & 9 \end{cases} \tag{38}$$

On trouve que: $a = 2$, $b = -1$ et $c = 3$