Ensembles et Applications

A.Belcaid

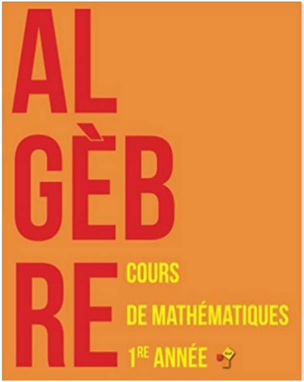
École Nationale des Sciences Appliqués.

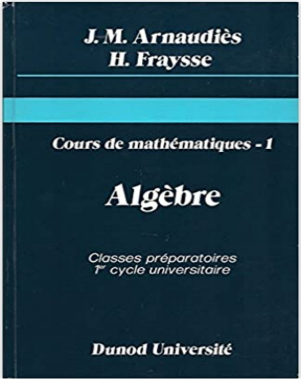
19 octobre 2020

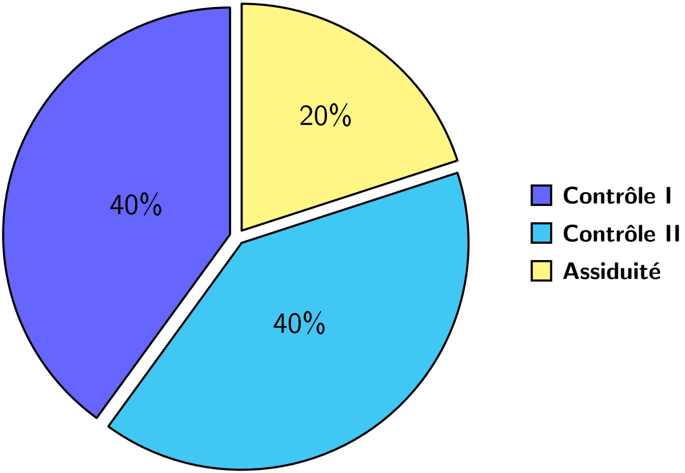
Apperçu du cours

1. Ensembles et Applications.
   - Ensembles.
   - Applications.
   - Injection/Surjection/Bijection.
   - Ensembles finis.
   - Relations d'équivalence.
2. Nombres Complexe
   - Définition.
   - Equation de second ordre.
   - Trigonométrie.
   - Relation avec la géométrie.
3. Théorie de groupes
   - Groupe.
   - Sous groupes.
   - Morphisme de groupe.
   - Groupe de permutation.
4. Polynômes
   - Définition.
   - Arithmétique sur les polynômes.
   - Racine de polynômes.
   - Fractions rationnelles.

Livre de Référence






20%
40%
40%
Contrôle I
Contrôle II
Assiduité

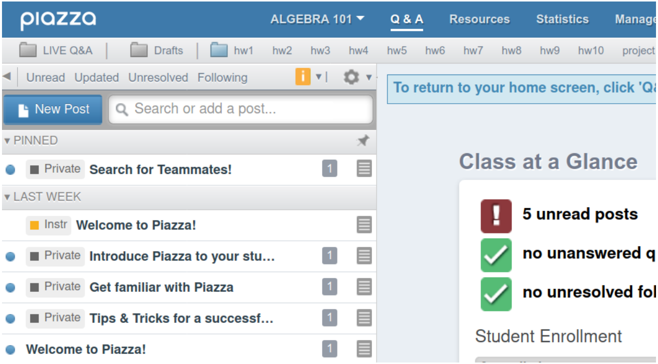


Figure: Plateforme de discussion

https://piazza.com/class/l96sp61sjyj6lr

Ensembles

Dans votre apprentissage de mathématiques, vous avez utiliser les ensembles suivants:

1. Ensemble des nombres **entiers naturels**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

2. Ensemble des nombres **entiers relatifs**:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

3. Ensemble des nombre **rationnels**:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$$

4. Ensemble des **réels** $\mathbb{R}$ comme $\sqrt{2}$, π, et $\log(2)$.
5. Finalement l'ensemble des nombres **complexes** $\mathbb{C}$.

Définition

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Exemples

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Exemples

- Ensemble des couleurs $\{\text{rouge}, \text{vert}, \text{bleu}\}$.

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Exemples

- Ensemble des couleurs $\{\text{rouge}, \text{vert}, \text{bleu}\}$.
- Ensemble des nombres **pairs**:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } n\}$$

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Exemples

- Ensemble des couleurs $\{\text{rouge}, \text{vert}, \text{bleu}\}$.
- Ensemble des nombres **pairs**:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } n\}$$

- $$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\}$$

Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (**éléments**) rassemblées selon une ou plusieurs **propriétés** mathématiques.
- Ces propriétés seront suffisantes pour **affirmer** si un élément **appartient** a cet ensemble.

Exemples

- Ensemble des couleurs $\{\text{rouge}, \text{vert}, \text{bleu}\}$.
- Ensemble des nombres **pairs**:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } n\}$$

- $$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\}$$
- $$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$$

Appartenance

Appartenance

- Si un en élément x appartient à un ensemble E. On écrit:

$$x \in E \tag{1}$$

Appartenance

- Si un en élément x appartient à un ensemble E. On écrit:

$$x \in E \tag{1}$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \tag{2}$$

Appartenance

- Si un en élément x appartient à un ensemble E. On écrit:

$$x \in E \tag{1}$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \tag{2}$$

Exemple

Appartenance

- Si un en élément x appartient à un ensemble E. On écrit:

$$x \in E \tag{1}$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \tag{2}$$

Exemple

Appartenance

- Si un en élément x appartient à un ensemble E. On écrit:

$$x \in E \tag{1}$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \tag{2}$$

Exemple

$$2 \in \mathbb{N}. \ -2 \notin \mathbb{N}. \ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Appartenance

- Si un en élément x appartient à un ensemble E. On écrit:

$$x \in E \tag{1}$$

- Dans le cas contraire:

$$x \notin E \tag{2}$$

Exemple

$$2 \in \mathbb{N}. \ -2 \notin \mathbb{N}. \ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Ensemble vide

Un ensemble **particulier** est l'ensemble **vide** note $\emptyset$ et qui ne contient aucun élément.

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si tous les éléments de E sont dans F.

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \tag{3}$$

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si tous les éléments de E sont dans F.

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \tag{3}$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F.

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si tous les éléments de E sont dans F.

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \qquad (3)$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F.

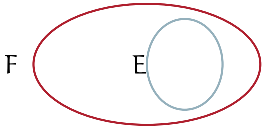


Figure: Inclusion

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si tous les éléments de E sont dans F.

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \tag{3}$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F.

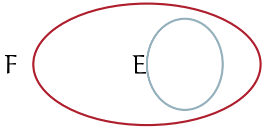


Figure: Inclusion

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si tous les éléments de E sont dans F.

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \tag{3}$$

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F.

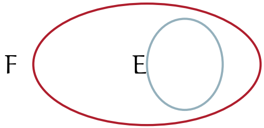


Figure: Inclusion

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si tous les éléments de E sont dans F.

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \qquad (3)$$

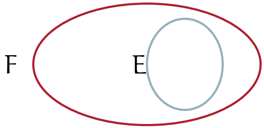


Figure: Inclusion

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F.

Négation

$$E \not\subset F \iff$$

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si tous les éléments de E sont dans F.

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \qquad (3)$$

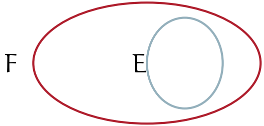


Figure: Inclusion

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F.

Négation

$$E \not\subset F \iff$$

Inclusion

On note $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ si tous les éléments de E sont dans F.

$$E \subset F \iff \forall x \in E \quad x \in E \implies x \in F \tag{3}$$

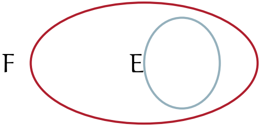
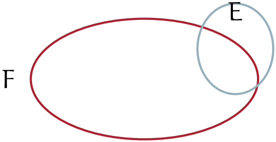


Figure: Inclusion

- On dit aussi que E est un **sous ensemble** ou une **partie** de F.

Négation

$$E \not\subset F \iff (\exists x \in E) \text{ tel que } x \notin F \tag{4}$$



Égalité

$$E = F \iff (E \subset F) \text{ et } (F \subset E) \tag{5}$$

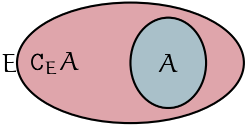
Égalité

$$E = F \iff (E \subset F) \text{ et } (F \subset E) \tag{5}$$

Complémentaire

Si $A \subset E$, on note son **complémentaire** $\complement_E A$ l'ensemble:

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\} \tag{6}$$

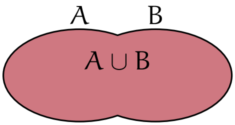


- Dans la littérature on trouve aussi les notations A^c, $\overline{A}$ ou $E \backslash A$.

Union

Pour deux ensembles A et $B \subset E$, On note **l'union** $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\} \tag{7}$$

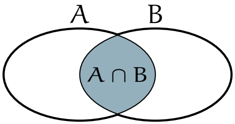


On doit mentionner que le **ou** n'est pas exclusive, i.e x peut appartenir ou deux ensembles en même temps.

Intersection

Pour deux ensembles A et $B \subset E$, On note **l'intersection** $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \textbf{ et } x \in B\} \tag{8}$$

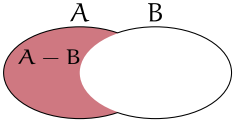


Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**

Différence

Pour deux ensembles A et $B \subset E$, On note **la différence** $A - B$:

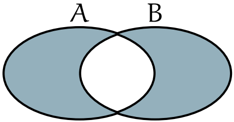
$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \textbf{ et } x \notin B\} \tag{9}$$



Différence symmétrique

Pour deux ensembles A et $B \subset E$, On note **la différence symmétrique** $A \Delta B$:

$$A \Delta B = (A \cup B)\ (B \cap A) \tag{10}$$



Mini Exercices

1. Donner l'ensemble $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}$
2. Calculer l'ensemble $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\}$
3. Calculer $\{1,2,3\} - \{3,4,5\}$.
4. Donner $\{1,2,3\} \,\Delta\, \{3,4,5\}$.
5. Soit $B = \complement_E A$, evaluer $A \cup B$ et $A \cap B$.

Intersection

Etant donné les deux ensembles:

$$\begin{aligned} A &= \{2, a^2 - 4a + 7\} \\ B &= \{a+1, a^2+1, a^2-1\} \end{aligned}$$

Sachant que $A \cap B = \{4\}$, quelle est la valeur de a?

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:
  - $A \cup B = B \cup A$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- **Associativité**:

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- **Associativité**:
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- **Associativité**:
  - $\left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right)$
  - $\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- **Associativité**:
  - $\left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right)$
  - $\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$
- **Idempotente**:

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- **Associativité**:
  - $\left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right)$
  - $\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$
- **Idempotente**:
  - $A \cup A = A$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Commutativité**:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- **Associativité**:
  - $\left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right)$
  - $\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$
- **Idempotente**:
  - $A \cup A = A$
  - $A \cap A = A$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Distributivité**:

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Distributivité**:
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Distributivité**:
  - $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cap C\right)$
  - $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cup C\right)$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Distributivité**:
  - $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cap C\right)$
  - $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cup C\right)$
- **Loi de Morgan**:

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Distributivité**:
  - $A \cup \big(B \cap C\big) = \big(A \cup B\big) \cap \big(A \cap C\big)$
  - $A \cap \big(B \cup C\big) = \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cup C\big)$
- **Loi de Morgan**:
  - $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Soit A, B et C des ensembles de E.

Règles de calcul

- **Distributivité**:
  - $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cap C\right)$
  - $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cup C\right)$
- **Loi de Morgan**:
  - $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
  - $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Preuve associativité

- Prouvons que $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_{E} = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_{F}$

Preuve associativité

- Prouvons que $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_{E} = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_{F}$
- Supposons que $x \in E \implies x \in A$ ou $x \in \left(B \cap C\right)$:

$$x \in A \implies x \in (A \cup B) \tag{11}$$
$$x \in A \implies x \in (A \cup C) \tag{12}$$

Selon (11) et (12), on peut conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup B)$. Ainsi:

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{F} \tag{13}$$

Preuve associativité

- Prouvons que $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_{E} = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_{F}$
- Supposons que $x \in E \implies x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$:

$$x \in A \implies x \in (A \cup B) \tag{11}$$
$$x \in A \implies x \in (A \cup C) \tag{12}$$

Selon (11) et (12), on peut conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup B)$. Ainsi:

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{F} \tag{13}$$

- Supposons que $x \in F \implies x \in (A \cup B)$ et $x \in (A \cup C)$.

  On traite alors deux **cas**:
  - $x \in A \implies x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in E$
  - $x \notin A \implies x \in B$ et $x \in C \implies x \in (B \cap C) \implies x \in E$

$$\mathbf{F} \subset \mathbf{E} \tag{14}$$

Preuve associativité

- Prouvons que $\underbrace{A \cup (B \cap C)}_{E} = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_{F}$
- Supposons que $x \in E \implies x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$:

$$x \in A \implies x \in (A \cup B) \tag{11}$$
$$x \in A \implies x \in (A \cup C) \tag{12}$$

Selon (11) et (12), on peut conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup B)$. Ainsi:

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{F} \tag{13}$$

- Supposons que $x \in F \implies x \in (A \cup B)$ et $x \in (A \cup C)$.

  On traite alors deux **cas**:
  - $x \in A \implies x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in E$
  - $x \notin A \implies x \in B$ et $x \in C \implies x \in (B \cap C) \implies x \in E$

$$\mathbf{F} \subset \mathbf{E} \tag{14}$$

Selon (13) et (14), on conclut que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \tag{15}$$

Mini Exercices

Mini Exercices

1. Évaluer $A \cup \emptyset$

Mini Exercices

1. Évaluer $A \cup \emptyset$
2. Calculer $A \cap \emptyset$

Mini Exercices

1. Évaluer $A \cup \emptyset$
2. Calculer $A \cap \emptyset$
3. Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$

Mini Exercices

1. Évaluer $A \cup \emptyset$
2. Calculer $A \cap \emptyset$
3. Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$
4. Quel sera l'ensemble $(A^c)^c$.

Mini Exercices

1. Évaluer $A \cup \emptyset$
2. Calculer $A \cap \emptyset$
3. Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$
4. Quel sera l'ensemble $(A^c)^c$.
5. Prouver que $A \subset B \iff B^c \subset A^c$

Mini Exercices

1. Évaluer $A \cup \emptyset$
2. Calculer $A \cap \emptyset$
3. Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$
4. Quel sera l'ensemble $(A^c)^c$.
5. Prouver que $A \subset B \iff B^c \subset A^c$
6. On suppose que $E = \{1, 2, \ldots, 9\}$, et soit $A = \{2, 5, 7, 3, 1\}$ et $B = \{9, 8, 7, 5, 2\}$. En utilisant la loi de **Morgan**, calculer $A^c \cup B^c$.

Mini Exercices

1. Évaluer $A \cup \emptyset$
2. Calculer $A \cap \emptyset$
3. Prouver que $A \subset B \iff A \cup B = B$
4. Quel sera l'ensemble $(A^c)^c$.
5. Prouver que $A \subset B \iff B^c \subset A^c$
6. On suppose que $E = \{1, 2, \ldots, 9\}$, et soit $A = \{2, 5, 7, 3, 1\}$ et $B = \{9, 8, 7, 5, 2\}$. En utilisant la loi de **Morgan**, calculer $A^c \cup B^c$.
7. Donner une démonstration des deux lois de **Morgan**.

Ensemble des parties

Pour un ensemble E, on note $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ l'ensemble de tous les sous ensembles (parties) de E.
Par exemple, pour l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, on as :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\right\} \tag{16}$$

Ensemble des parties

Pour un ensemble E, on note $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ l'ensemble de tous les sous ensembles (parties) de E.
Par exemple, pour l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, on as :

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\} \tag{16}$$

Exercice

Donner l'ensemble $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$

Définition

Soit deux ensemble E et F, on appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\} \tag{17}$$

Définition

Soit deux ensemble E et F, on appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\} \tag{17}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

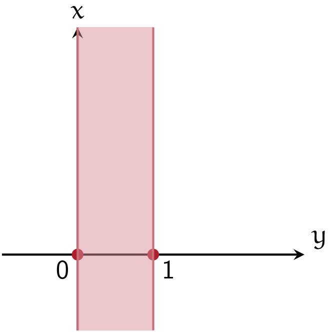
Définition

Soit deux ensemble E et F, on appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\} \tag{17}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R} \times [0, 1] = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$



Mini Exercices

Mini Exercices

- Représenter graphiquement l'ensemble suivant:

$$(]0,1[\cup]2,3[) \times [-1,1] \tag{18}$$

Mini Exercices

- Représenter graphiquement l'ensemble suivant:

$$(]0,1[\cup]2,3[)\times[-1,1] \tag{18}$$

- Même question pour:

$$(\mathbb{R}-[0,1])\times([0,1]) \tag{19}$$

Mini Exercices

- Représenter graphiquement l'ensemble suivant:

$$(]0,1[\cup]2,3[) \times [-1,1] \tag{18}$$

- Même question pour:

$$(\mathbb{R} - [0,1]) \times ([0,1]) \tag{19}$$

- Exprimer le cube suivant en utilisant le produit: