Groupes

Exercice 1 (★ ★):

Pour chaque cas, vérifier si l'ensemble avec la loi proposée est un **groupe**:

1. G est l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, muni de la composition.
2. G est l'ensemble des fonctions croissantes muni de l'addition.
3. $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition. où:
   - $f_1 = x$
   - $f_2 = -x$
   - $f_3 = \dfrac{1}{x}$
   - $f_4 = -\dfrac{1}{x}$

Exercice 2 (★ ★):

Pour les deux cas suivants, démontrer que G est un groupe puis vérifier s'il est **abélien**.

1. $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ sur $G =]-1, 1[$.
2. $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\ ,\ y_1 e^{x_2} + y_2 e^{x_1})$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (★ ★):

Soit G un groupe **fini** d'élément neutre e.

1. Montrer que si cardinal de G est pair, alors il existe $x \in G$ tel que:
$$x \neq e \ \text{ et } \ x^{-1} = x$$

Exercice 4 (★ ★ ★):

Soit G un ensemble **fini** muni d'une loi de composition interne $*$ associative. On dit qu'un élément a est **régulier** si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- $a * x = a * y \implies x = y$
- $x * a = y * a \implies x = y$

On suppose que tous les éléments de G sont réguliers, et on fixe $a \in G$.

1. Démontrer qu'il existe $e \in G$ tel que $a * e = a$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in G$, on a $e * x = x$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in G$, on a $x * e = x$.
4. Démontrer que $(G, *)$ est un groupe.
5. Le résultat subsiste-t-il si G n'est fini?

Exercice 5 (★):

Pour chaque cas, déterminer si la partie H est un sous groupe de G.

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. $G = (\mathbb{R}^*, +)$ et $H =]-1, \infty[$.
4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \mathbb{Q}^*$.
5. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, (a, b) \neq (0, 0)\}$.

Exercice 6 (★ ★):

Soit $(G, .)$ un groupe. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G

1. $C(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G\ ,\ x.y = y.x\}$, $C(G)$ s'appelle le **centre** de G.
2. $aHa^{-1} = \left\{aha^{-1}\ , h \in H\right\}$ où $a \in G$ et H est un sous groupe.
3. On suppose que G est abélien. On dit que x est un élément de **torsion** de G s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$.
   - Démontrer que l'ensemble de torsion forme un sous groupe.

Exercice 7 (★ ★):

Soit G un groupe et H et K deux sous groupes de G. Démontrer que $H \cup K$ est un sous groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 8 (★ ★):

Montrer que $H = \left\{x + \sqrt{3}y \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\ ,\ x^2 - 3y^2 = 1\right\}$ est un sous groupe de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$.

Exercice 9 (★ ★):

Soit $(G, .)$ un groupe fini et A, B deux sous groupes de G. On note

$$AB = \{a.b \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que AB est un sous groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 10 (★):

Les applications $\phi : G \longrightarrow H$ définies ci-dessous sont elles des morphisme de groupes?

1. $G = (\mathbb{R}^*, \times),\ H = (\mathbb{R}^*, \times))\ ,\ \phi(x) = |x|$.
2. $G = (\mathbb{R}^*, \times),\ H = (\mathbb{R}^*, \times))\ ,\ \phi(x) = 2x$.

Exercice 11 (★ ★ ★):

Soit f un morphisme de $G = (\mathbb{Z}, +)$ dans lui même.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}*$, on $f(n) = nf(1)$.
2. Endéduire que $\forall n \leq 0$ on a aussi $f(n) = nf(1)$.
3. Caractériser les morphismes **surjectifs** de G vers G.
4. Caractériser les morphismes **injectifs** de G vers G.

Exercice 12 (★):

Montrer qu'il est équivalent dans $\mathbb{Z}$ de dire m divise n, ou $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.

Exercice 13 (★):

- Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
- Caractériser le sous-groupe $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.
- Caractériser les sous-groupes suivants :

$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}\ ; \quad 5\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z}\ ; \quad 5\mathbb{Z} \cap 25\mathbb{Z}.$$