Ensembles et Applications

Exercice 1 (★):

Montrer que $\emptyset \subset X$, pour tout ensemble X.

Exercice 2 (★):

Soit E un ensemble donné et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$, montrer par contraposition les assertions suivantes:

1. $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

Exercice 3 (★ ★):

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application de E vers F.

Démontrer que:

- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$

Exercice 4 (★ ★):

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer que

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

Exercice 5 (★ ★):

Est-il vrai que:

1. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?
2. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 6 (★ ★):

Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

1. $(F \subset G \iff F \cup G = G)$
2. $(F \subset G \iff \complement F \cup G = E)$.

En déduire que :

1. $(F \subset G \iff F \cap G = F)$
2. $(F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset)$.

Exercice 7 (★):

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.

- Écrire le produit cartésien $A \times B$.
- Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Exercice 8 (★ ★):

Soit $A \subset E$, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques.
Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$.
2. fg.
3. $f + g - fg$.
4. $f + g - 2fg$

Exercice 9 (★ ★ ★):

Soit un ensemble E et deux parties A et B de E.

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que

$$A \triangle A' = A' \triangle A = X$$

.

Indice: *Il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

Exercice 10 (★ ★):

Soient $A, B \subset E$.
Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

Exercice 11 (★ ★):

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

- A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 12 (★):

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants:
   - $f([-3, -1])$
   - $f([-2, 1])$
   - $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$
   - $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$
2. Mêmes questions avec les ensembles:
   - $f^{-1}(]-\infty, 2])$
   - $f^{-1}([1, +\infty[)$
   - $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$
   - $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$

Exercice 13 (★ ★):

On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y < 1\right\} \\
A_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y > -1\right\} \\
A_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x + y| < 1\right\} \\
A_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| < 1\right\} \\
A_5 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| < 1\right\}
\end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire par une démonstration géométrique que
$$(|x + y| < 1 \text{ et } |x - y| < 1) \Leftrightarrow |x| + |y| < 1.$$

Exercice 14 (★ ★):

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit

$$f^n = \begin{cases} \text{id} & \text{si } n = 0 \\ f^{n+1} = f^n \circ f & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$
$$f^{n+1} = f \circ f^n$$
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$$

Exercice 15 (★ ★):

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.

- f est-elle injective? surjective?
- Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 16 (★ ★):

Les fonctions suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n \quad ; \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2.$$

Exercice 17 (★ ★):

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 18 (★ ★):

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. (optionnelle) Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 19 (★ ★):

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$.
Montrer que:

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$
$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Exercice 20 (★ ★):

Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective $\iff \forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B$.

3. f est injective $\iff \forall A \subset X \ f^{-1}(f(A)) = A$.

4. f est bijective $\iff \forall A \subset X \ f(\complement A) = \complement f(A)$.

Exercice 21 (★ ★):

Soit $f : X \to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes:

i. f est injective.

ii. $\forall A, B \subset X \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

iii. $\forall A, B \subset X \ A \cap B = \emptyset \implies f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 22 (★ ★ ★):

Soit $f : X \to Y$. On note $\hat{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), A \mapsto f(A)$ et $\tilde{f} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), B \mapsto f^{-1}(B)$.

Montrer que:

1. f est injective $\iff \hat{f}$ est injective.
2. f est surjective $\iff \tilde{f}$ est injective.

Exercice 23 (★):

Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par:

$$(a, b) \ \mathcal{R} \ (a', b') \iff a + b' = b + a'$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 24 (★):

Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x, y) \ \mathcal{R} \ (x', y') \iff y = y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 25 (★ ★):

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathcal{R} y \iff x e^y = y e^x$$

est une relation d'équivalence.

2. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 26 (★ ★):

Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes ; dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si l'ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans $\mathcal{P}(E)$:

$$A \ \mathcal{R}_1 \ B \iff A \subset B$$

2. Dans $\mathcal{P}(E)$

$$A \ \mathcal{R}_2 \ B \iff A \cap B = \emptyset$$

3. Dans $\mathbb{Z}$:

$$a \ \mathcal{R}_3 \ b \iff \exists n \in \mathbb{N} \ \ a - b = 3n$$

Exercice 27 (★ ★):

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\prec$ par

$$X \prec Y \quad \text{ssi} \quad (X = Y \ \text{ ou } \ \forall x \in X \ \forall y \in Y \ x \leq y).$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.