Correction Partiel Algèbre

February 7, 2021

1 Egalité Ensemble

On cherche à démontrer par **double inclusion** l'égalité ensembliste suivante:

$$\underbrace{(A\Delta B)\cap C}_{F} = \underbrace{(A\cap C)\Delta(B\cap C)}_{G} \tag{1}$$

1. $F \subset G$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x\in F \quad &\implies \quad x\in(A\Delta B) \text{ et } x\in C\\
&\implies \quad \big[x\in(A/B) \text{ ou } x\in(B/A)\big] \text{ et } x\in C\\
&\implies \quad \big[x\in(A\cap C)/(B\cap C)\big] \text{ ou } \big[x\in(B\cap C)/(A\cap C)\big]\\
&\implies \quad x\in G
\end{aligned}$$

2. $G \subset F$:

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x\in G \quad &\implies \quad x\in\big[(A\cap C)/(B\cap C)\big] \text{ ou } \big[(B\cap C)/(A\cap C)\big]\\
&\implies \quad x\in\big[(A\cap C)/B\big] \text{ ou } \big[(B\cap C)/A\big]\\
&\implies \quad \big[x\in A/B \text{ ou } x\in B/A\big] \text{ et } \big[x\in C\big]\\
&\implies \quad x\in\big[A\Delta B\big]\\
&\implies \quad x\in F
\end{aligned}$$

2 Fonction caractéristique

1. Fonction caractéristique de F:

$$
\begin{aligned}
\pi_F &= \pi_{A\Delta B}\ \pi_C \\
&= \big[\pi_A + \pi_B - 2\pi_A\pi_B\big]\pi_C
\end{aligned}
$$

2. Fonction caractéristique de G:

$$
\begin{aligned}
\pi_G &= \pi_{A\cap C} + \pi_{B\cap C} - 2\pi_{A\cap B\cap C} \\
&= \pi_A\ \pi_C + \pi_B\ \pi_C - 2\big(\pi_A\ \pi_B\big)\pi_C \\
&= \big[\pi_A + \pi_B - 2\pi_B\pi_C\big]\pi_C
\end{aligned}
$$

3. D'après les deux équations on conclut que :

$$
\begin{aligned}
\pi_F &= \pi_G \\
&\Longleftrightarrow F = G
\end{aligned}
$$

3 Injection/Surjection

Soit une application $f : E \longrightarrow E$ tel que

$$f \circ f \circ f = f \tag{2}$$

- **Montrer que si f est injective alors elle est surjective** :

  Pour démontrer que f est surjective, il faut démontrer que tout élément $y \in E$ admet au moins un antécédent.

  Soit alors $y \in E$, en utilisant l'égalité (2), on obtient que

  $$f\Big(f\big(f(y)\big)\Big) = f(y) \tag{3}$$

  $$f\big(f(y)\big) = y \tag{4}$$

  Ainsi on as prouvé que y admet un antécédent qui est $f(y)$. D'où, f est **surjective**.

- **Montrer que si f est surjective alors elle est injective**

Proof. Soit deux éléments x_1 et x_2 dans E tel que

$$f(x_1) = f(x_2) = y \tag{5}$$

Par absurde, supposons que $x_1 \neq x_2$, comme f est surjective on as alors, $\exists x_1', x_2' \in E$ tel que

$$\begin{cases} x_1 = f(x_1') \\ x_2 = f(x_2') \end{cases}$$

On utilise maintenant le fait que $f = f \circ f \circ f$ de l'équation (2), on aura

$$\begin{cases} x_1 = f(f(\underbrace{f(x_1')}_{x_1})) \\ x_2 = f(f(\underbrace{f(x_2')}_{x_2})) \end{cases}$$

En utilisant l'égalité des images dans l'équation (5), on aura

$$\begin{cases} x_1 = f(\underbrace{f(x_1)}_{y})) \\ x_2 = f(\underbrace{f(x_2)}_{y}) \end{cases}$$

Ainsi on aura

$$\begin{cases} x_1 = f(y) \\ x_2 = f(y) \end{cases}$$

Aini on aura que $x_1 = x_2$. Contradiction ‼

□

4 Relation Equivalence

On considère dans dans le plan $\mathbb{R}^2$, la relation

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff x_1 - 5y_2 = x_2 - 5y_1 \tag{6}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence:

Réflexive : Soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, on as

$$x_1 - 5y_1 = x_2 - 5y_1$$

On conclut que $(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_1, y_1)$.

Symétrique : Soit $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$. tel que $P_1 \ \mathcal{R} \ P_2$ On a alors:

$$x_1 - 5y_2 = x_2 - 5y1 \tag{7}$$

En permutant les équation on obtient que $x_2 - 5y_1 = x_1 - 5y_2$. Ainsi

$$P_1 \ \mathcal{R} \ P_2 \tag{8}$$

Transitive Soient $P_1(x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ et $P_3 = (x_3, y_3)$ trois points de $\mathbb{R}^2$ tel que .

$$P_1\mathcal{R}P_2 \text{ et } P_2\mathcal{R}P_3$$

On aura lors

$$\begin{cases} x_1 - 5y_2 & = & x_2 - 5y_1 \\ x_2 - 5y_3 & = & x3 - 5y_2 \end{cases} \tag{9}$$

En prenant la somme on obtient

$$x_1 - 5y_2 + x_2 - 5y_3 = x_2 - 5y_1 + x_3 - 5y_2 \tag{10}$$

qui se simplifie en

$$x_1 - 5y_3 = x3 - 5y_1 \tag{11}$$

$$P_1 \ \mathcal{R} \ P_3 \tag{12}$$

2. Dessin classe d'équivalence: Soit un point $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{Cl}(P) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{a + 5b}_{f(a,b)} = \underbrace{x + 5y}_{f(x,y)} \right\} \tag{13}$$

$$\mathrm{Cl}(P) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a, b) = f(x, y) \right\} \tag{14}$$

Ainsi la classe $\mathrm{Cl}(a, b)$ est l'ensemble des points qui ont la même image que (a, b) par la fonction $f : (x, y) \longrightarrow x + 5y$

5 Relation d'ordre

Pour deux points dans $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ on considère la relation suivante:

$$P_1(x1, y_1)\ \mathcal{R}\ P_2(x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2 \tag{15}$$

1. Démontrer que c'est une relation d'ordre? On considère trois points $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ et $P_3 = (x_3, y_3)$.

   Réflexive :

   On a $x_1 \leq x_1$ et $y_1 \leq y_1$ alors:

   $$P_1\ \mathcal{R}\ P_1 \quad \forall P_1 \in \mathbb{R}^2$$

   Transitive On suppose que $P_1\ \mathcal{R}\ P_2$ et $P_2\ \mathcal{R}\ P_3$. On as alors:

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & \leq & x_2 \\ y_1 & \leq & y_2 \end{array}\right. et \left\{\begin{array}{lcl} x_2 & \leq & x_3 \\ y_2 & \leq & y_3 \end{array}\right. \tag{16}$$

   On conclut alors que:

   $$\begin{array}{lcl} x_1 & \leq & x_3 \\ y_1 & \leq & y_3 \end{array} \tag{17}$$

   Ainsi:

   $$P_1\ \mathcal{R}\ P_3 \tag{18}$$

   Antisymétrique : On suppose que $P_1\ \mathcal{R}\ P_2$ et $P_2\ \mathcal{R}\ P_1$. On as alors:

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & \leq & x_2 \\ y_1 & \leq & y_2 \end{array}\right. et \left\{\begin{array}{lcl} x_2 & \leq & x_1 \\ y_2 & \leq & y_1 \end{array}\right. \tag{19}$$

   On conclut alors que:

   $$\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_2 \\ y_1 & = & y_2 \end{array} \tag{20}$$

   Ainsi:

   $$\left[P_1\ \mathcal{R}\ P_2 \text{ et } P_2\ \mathcal{R}\ P_1\right] \implies P_1 = P_2 \tag{21}$$

   Ainsi on conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'**ordre**.

2. Représenter éléments supérieures et inférieurs. Soit $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, un point dans le plan, alors les éléments inférieurs à (a, b) vérifient la relation suivante:

   $$Inf_{(a,b)} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)\ \mathcal{R}\ (a, b)\right\} \tag{22}$$

$$Inf_{(a,b)} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq a \text{ et } y \leq b\right\} \tag{23}$$

De même on obtient que:

$$Sup_{(a,b)} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a \text{ et } y \geq b\right\} \tag{24}$$

Une illustration de ces deux ensembles est présentée dans la (figure.1).

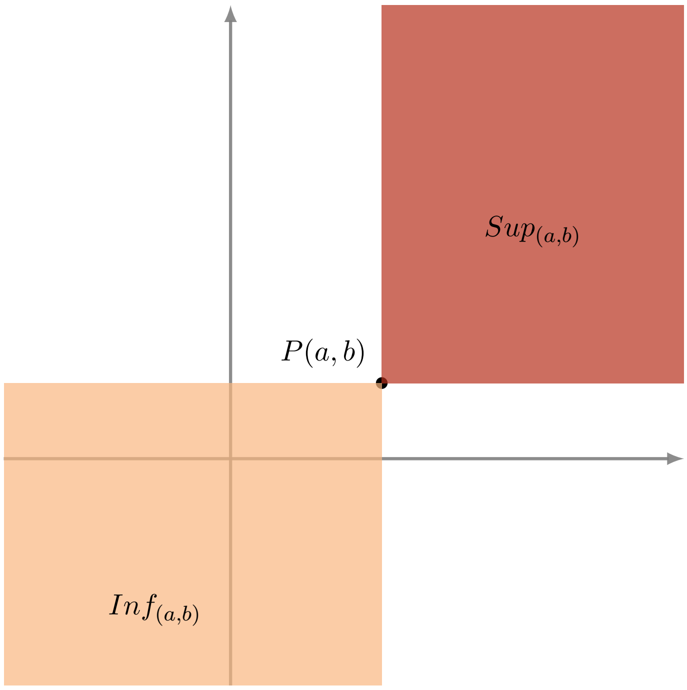

Figure 1: Illustration des éléments supérieurs et inférieurs d'un point (a,b) par la relation $\mathcal{R}$

3. Cette relation est elle totale.

   D'après le graphique on peut observer que pour un point (a,b), on ne peut pas le comparer à tous les points. Par exemple si considère le point $P(0,0)$ et le point $Q(-1,1)$, Ils ne sont pas comparables.

6 Vérification groupe

Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et la loi $*$ définie comme suit:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_2 y_1 + \frac{x_1}{y_2}\ ,\ y_1 y_2) \tag{25}$$

Loi interne : Soit $P_1 = (x_1, y_1),\ P_2 = (x_2, y_1) \in G$, montrons que $P_1 * P_2 \in G$

On a x_2 et $x_2 \in \mathbb{R}$ et y_1 et $y_2 \in \mathbb{R}^* \implies$

$$\begin{cases} x_2 y_1 + \frac{x_1}{y_2} & \in & \mathbb{R} \\ y_1 y_2 & \in & \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Donc

$$P_1\ *\ P_2 \in G$$

Associative, commutative Soient $P_i = (x_i, y_i)\ i \in \{1, 2, 3\}$ trois points de G.

- Calculons la valeur de $(P_1\ *\ P_2)\ *\ P_3$

$$(P_1\ *\ P_2)\ *\ P_3 = (x_3 y_1 y_2 + \frac{x_2 y_1 + \frac{x_1}{y_2}}{y_3}\ ,\ y_1 y_2 y_3) \tag{26}$$

$$P_1\ * (P_2\ *\ P_3) = \big((x_3 y_2 + \frac{x_2}{y_3}) y_1 + \frac{x_1}{y_2 y_3}\ ,\ y_1 y_2 y_3\big) \tag{27}$$

Ce qui prouve qu'on possède l'égalité entre les deux expressions.

Commutative? Il suffit de calculer par exemple

$$(1, 4)\ *\ (3, 1) = (12 + 1, 4) \neq (3 + \frac{3}{4}, 4) = (3, 1)\ *\ (1, 4)$$

Donc la loi n'est pas **commutative**.

Élément neutre :

Soit $P = (x, y)$, cherchons un élément $E = (e_1, e_2)$ tel que

$$P\ *\ E = P \quad \forall P \in \mathbb{R}^2 \tag{28}$$

On obtient que:

$$\begin{cases} e_1 y + \dfrac{x}{e_2} & = & x \\ y e_2 & = & y \end{cases} \implies \begin{cases} e_1 y & = & 0 \\ e_2 & = & 1 \end{cases} \begin{cases} e_1 & = & 0 \\ e_2 & = & 1 \end{cases} \tag{29}$$

Puisque la loi n'est pas commutative, il faut aussi vérifier

$$(0, 1)\ *\ (x, y) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

On as

$$(0,1) \ * \ (x,y) = (x + \frac{0}{y} \ , \ y) = (x,y)$$

Donc G admet un élément neutre $E(0,1)$.

Groupe : Pour que G soit un groupe, il faut que chaque élément de G admet un opposé.

Donc soit $P = (x,y) \in G$, cherchons $P^{'} = (x^{'}, y^{'}) \in G$ tel que

$$P \ * P^{'} = P^{'} \ * \ P = (0,1) \tag{30}$$

Si on applique la première relation $P \ * \ P^{'}$, on aura alors que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^{'}y + \frac{x}{y^{'}} & = & 0 \\ yy^{'} & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (x^{'} + x)y & = & 0 \\ y^{'} & = & \dfrac{1}{y} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^{'} & = & -x \\ y^{'} & = & \dfrac{1}{y} \end{array} \right.$$

On doit vérifier maintenant que $P^{'} = (-x, \frac{1}{y}$, vérifie aussi $P^{'} \ * \ P$

$$(-x, \frac{1}{y}) \ * \ (x,y) = (\frac{x}{y} - \frac{x}{y}, \frac{y}{y}) = (0,1) \tag{31}$$

Donc chaque élément (x,y) admet un opposé $(-x, \frac{1}{y})$. Ainsi on conclut que $(G, *)$ est un groupe non abélien.

7 Automorphisme antérieur

Soit $(G, .)$ un groupe. Pour chaque élément $a \in G$, on note la fonction τ_a définie comme suit:

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{lcl} G & \longrightarrow & G \\ x & \longrightarrow & a^{-1}.x.a \end{array} \right. \tag{32}$$

Morphisme du groupe :

Soit deux éléments x et y dans G On a :

$$\begin{aligned} \tau_a\big(x.y\big) &= a^{-1}.x.y.a && (33) \\ &= \underbrace{a^{-1}x.a}_{\tau_a(x)} . \underbrace{a^{-1}.y.a}_{\tau_a(y)} && (34) \\ &= \tau_a(x).\tau_a(y) && (35) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que τ_a est un morphisme de groupe.

Composée :
$$\forall a, b \in G, \quad \tau_a \circ \tau_b = \tau_{b.a} \tag{36}$$

On a:

$$\begin{aligned}
\tau_a \circ \tau_b(x) &= \tau_a\big(\tau_b(x)\big) && (37)\\
&= \tau_a\big(b^{-1}.x.b\big) && (38)\\
&= a^{-1}.b^{-1}.x.b.a && (39)\\
&= (b.a)^{-1}.x.(b.a) && (40)\\
&= \tau_{b.a}(x) && (41)
\end{aligned}$$

Bijection : Soit $a \in G$, montrons que l'application est τ_a est bijective.

Puisque $(G, .)$ est un groupe, chaque élément a admet un opposé qu'on note a^{-1}. Selon l'équation (41), on a

$$\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{a^{-1}.a} = \tau_e = \text{Id}_G \tag{42}$$

De même on a:

$$\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = \tau_{a.a^{-1}} = \tau_e = \text{Id}_G \tag{43}$$

Ainsi chaque application τ_a est bijective et son inverse est $\tau_{a^{-1}}$.

Groupe des morphisme : On note $\Theta = \{\tau_a \mid a \in G\}$, montrons qu e$(\Theta, \circ)$ est un sous groupe du groupe des fonctions de G vers G.

- **Elément neutre**: On a $\tau_e : x \to e^{-1}.x.e = x$ Ainsi

$$\tau_e = \text{Id} \in \Theta$$

- **Loi interne** : Selon la question (b), on a:

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{b.a} \in \Theta$$

- **Opposé**: Selon la question (c), on a

$$\forall a \in G \tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{a^{-1}} \circ \tau a = \text{id}$$

Donc chaque élément admet un opposé. Ainsii que Θ un **groupe**.

8 Polynômes

Soient $P = 2x^4 + 2x^3 - 2x - 2$ et $Q = -x^4 + 1$ deux polynômes dans $\mathbb{R}[X]$

1. Déterminer le **PGCD**(P,Q):

$$
\begin{aligned}
2x^4 + 2x^3 - 2x - 2 &= \left(-x^4 + 1\right) \cdot -2 + \left(2x^3 - 2x\right) \\
-x^4 + 1 &= \left(2x^3 - 2x\right) \cdot -\tfrac{1}{2}x + \left(-x^2 + 1\right) \\
2x^3 - 2x &= \left(-x^2 + 1\right) \cdot -2x + 0
\end{aligned}
$$

   Ainsi on conclut que le $D = (X^2 - 1)$, puisque le PGCD doit être **unitaire**.

2. Démontrer que $x^3 - x$ est un multiple de D.

$$
\begin{array}{r}
x^3 - x = \left(x^2 - 1\right) x \\
\underline{-x^3 + x} \\
0
\end{array}
$$

3. Pour retrouver alors U et V, on détermine les polynômes de **Bézout** puis on multiplie par x.

   Selon la deuxième equation de la décomposition on trouve que

$$
\begin{aligned}
Q &= (2x^3 - 2x)(-\frac{1}{2}x) - D \qquad (44) \\
D &= -Q + (\frac{1}{2}x)(2x^3 - 2x) \qquad (45)
\end{aligned}
$$

   On remplace maintenant $(2x^3 - 2)$ par son expression dans la première equation

$$
\begin{aligned}
D &= -Q + (\frac{1}{2}x)(P + 2Q) \qquad (46) \\
D &= \frac{1}{2}xP + (x - 1)Q \qquad (47)
\end{aligned}
$$

   Finalement pour retrouver C il suffit de multiplier par x

$$
C = xD = \underbrace{(\frac{1}{2}x^2)}_{U} P + \underbrace{(x^2 - x)}_{V} Q \qquad (48)
$$