101
Printemps
2019

Algèbre

Contrôle continue

- Vous avez **90 minutes** pour compléter l examen

Nom	
Prénom	
Nom étudiant à votre gauche	
Nom étudiant à votre droite	

Notes

Q1.	* Egalité Ensemble	/2
Q2.	* Fonction caractéristique	/2
Q3.	** Injection / Surjection	/2
Q4.	* Relation d'équivalence	/2
Q5.	* Relation d'ordre	/2
Q6.	** Vérification groupe	/2
Q7.	*** Automorphisme antérieur	/4
Q8.	** PGCD	/4
	Total	/20

Q1. [2 pts] * Egalité Ensemble

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E. Montrer (en utilisant une double inclusion) que:

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \, \Delta \, (B \cap C) \,. \tag{1}$$

Q2. [2 pts] * Fonction caractéristique

On cherche maintenant à prouver l'égalité de l'équation (1) en utilisant les fonctions caractéristiques:

$$\pi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

On accepte que si $\pi_A = \pi_B$, alors $A = B$.

1. Calculer, en fonction de π_A, π_B et π_C, la fonction caractéristique de $(A \Delta B) \cap C$.
2. Même question pour l'ensemble $(A \cap C)\Delta(B \cap C)$.
3. Endéduire le résultat de la question (Q1).

Q3. [2 pts] ** Injection / Surjection

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application tel que

$$f \circ f \circ f = f \tag{2}$$

- Montrer que si f est injective, alors aussi f est **surjective**.
- Inversement, si f est surjective, alors f est **injective**.

Q4. [2 pts] * Relation d'équivalence

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par:

$$(x_1, y_1) \, \mathcal{R} \, (x_2, y_2) \iff x_1 - 5y_2 = x_2 - 5y_1 \tag{3}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'**équivalence**.
2. Pour un point (a, b) dans le plan, Déterminer l'ensemble $\mathrm{Cl}\,((a, b))$.

Q5. [2 pts] * Relation d'ordre

Pour deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) dans le plan $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par:

$$\forall (x_1, y_1) \ \mathcal{R} \ (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq x_2 \ \text{ et } \ y_1 \leq y_2 \tag{4}$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. Pour un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, représenter graphiquement l'ensemble des éléments supérieurs à (a, b) et ceux qui sont inférieurs.
3. Cette relation est elle totale?

Q6. [2 pts] ** Vérification groupe

Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $*$ la loi définie comme suit:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = \left(x_2 y_1 + \frac{x_1}{y_2}, \ y_1 y_2 \right) \tag{5}$$

1. Vérifier que $*$ est un loi interne dans G.
2. La loi $*$ est-elle associative? Elle est commutative?
3. A-t-on un élément neutre dans $(G, *)$?
4. $(G, *)$ est-il un groupe?

Q7. [4 pts] *** Automorphisme antérieur

Soit $(G, .)$ un groupe. Pour chaque élément $a \in G$ on note la fonction τ_a définie comme suit:

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longrightarrow & a^{-1}.x.a \end{array} \tag{6}$$

1. Démontrer que $\forall a \in G, \quad \tau_a$ est un morphisme de groupe.
2. Vérifier que $\forall a, b \in G, \quad \tau_a \circ \tau_b = \tau_{a.b}$.
3. Montrer que $\forall a \in G \quad \tau_a$ est bijective. Déterminer sa fonction réciproque.
4. En déduire que l'ensemble de ces morphismes $\Theta = \{\tau_a \ , \ a \in G\}$ muni de la **composition** est un groupe.

Q8. [4 pts] ** PGCD

(a) [2 pts] Soit $2x^4 + 2x^3 - 2x - 2$ et $Q = -x^4 + 1$ deux polynômes dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $D = \text{PGCD}(P, Q)$, déterminer D en spécifiant les étapes de calcul.

(b) [2 pts] On cherche deux polynômes U et V tel que

$$U(2x^4 + 2x^3 - 2x - 2) + V(-x^4 + 1) = \underbrace{x^3 - x}_{C} \tag{7}$$

1. Démontrer que C est un **multiple** de D.
2. Calculer U et V.