101
Printemps
2021 Algèbre

Examen

- Vous avez **90 minutes** pour compléter l'examen

Nom	
Prénom	
Nom étudiant Devant vous:	
Nom étudiant Derrière:	

Notes

Q1. (*) Questions de cours	/4
Q2. (*) Groupes	/6
Q3. (**) Polynômes	/6
Q4. (**) Espaces vectoriels	/6
Total	/22

Q1. [4 pts] (*) Questions de cours

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille de E.
   - Donner la définition que la famille $\mathcal{A}$ est **génératrice**.
   - On suppose que $\mathcal{A}$ est génératrice, donner la relation entre $\text{Card}\mathcal{A} = k$ et $\dim E = n$.
2. Soit F un autre $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application.
   - Donner la définition de f est une **application linéaire**.
   - On suppose que f est linéaire, Définir $\ker f$.
   - Donner une condition sur $\ker f$ pour que f soit injective.
3. Soient E et F deux ensembles tel que $\text{Card}E = 3$ et $\text{Card}F = 5$.
   - Quel est le nombre d'**injections** de E vers F?
   - Quel sera le cardinal des sous ensembles de F contenant juste **deux** éléments.

Q2. [6 pts] (*) Groupes

1. Sur $E = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on définit sur E la loi interne $*$ par:
$$\forall x, y \in E^2 \quad x \, * \, y = x \, + \, y \, - \, xy \tag{1}$$
   - Montrer que $(E \, , \, *)$ est un groupe.
2. Montrer que la loi interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \qquad a \, * \, b = \ln\left(e^a + e^b\right)$$
   n'admet pas un élément neutre.
3. Soit $(G, \, .)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e. On suppose qu'on possède la propriété suivante:
$$\forall x \in G \qquad x^2 = x \, . \, x = e$$
   Montrer que $(G, \, .)$ est abélien.
4. On considère $(G, \, .)$ un groupe abélien. Montrer que l'application:
$$\Phi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longrightarrow & x^{-1} \end{array}$$
   est un morphisme de groupe (x^{-1} est le symétrique de x).

Q3. [6 pts] (**) Polynômes

On considère le polynôme $P = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

1. Montrer que $\alpha = 2$ est une racine de P.
2. Quel est le degré de multiplicité de α.
3. Donner une décomposition en $\mathbb{R}[X]$ de P.
4. On considère la fraction rationnelle
$$F = \frac{x+1}{P}.$$
Donner la décomposition **en éléments simples** de F.

Q4. [6 pts] (**) Espaces vectoriels

1. On considère l'ensemble:
$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z = t = 0\right\} \tag{2}$$
   - Prouvez que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   - Trouver un vecteur $u_1 \in \mathbb{R}^4$ tel que $E = \mathrm{Vect}(u_1)$.
   - Donner une base et la dimension de E.
2. On considère l'espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^4$ défini par:
$$F = \left\{(a,\ a+b,\ -a+c,\ c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\} \tag{3}$$
   - Trouver trois vecteurs u_2, u_3 et u_4 tel que $F = \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.
   - Donner une base et la dimension de F.
3. Démontrer que E et F sont **supplémentaires** dans $\mathbb{R}^4$.