Introduction a la dualite

A.Belcaid

ENSA-Safi

April 12, 2022

Objectifs

Cette lecture introduit la notion de **problème dual**. Cette transformation constitue un outil important pour l'étude des **profils marginaux**.

Après l'étude de cette lecture, vous pouvez:

1. Apprécier la signification des concepts de dualité.
2. Formuler le problème **dual** et comprendre sa relation avec le problème **primal**.
3. Comprendre la signification d'une **profit marginal**.

- Dans la **programmation linéaire** la notion de **dualité** implique que chaque problème peut être analyses de deux différents méthodes.

Introduction

- Dans la **programmation linéaire** la notion de **dualité** implique que chaque problème peut être analyses de deux différents méthodes.
- Ces deux méthodes doivent mener la même **solution optimale**.

Introduction

- Dans la **programmation linéaire** la notion de **dualité** implique que chaque problème peut être analyses de deux différents méthodes.
- Ces deux méthodes doivent mener la même **solution optimale**.
- Pour chaque LP, on peut formuler un deuxième problème appelé **Problème dual** et qui mène a la même solution.

Introduction

- Dans la **programmation linéaire** la notion de **dualité** implique que chaque problème peut être analyses de deux différents méthodes.
- Ces deux méthodes doivent mener la même **solution optimale**.
- Pour chaque LP, on peut formuler un deuxième problème appelé **Problème dual** et qui mène a la même solution.
- On considère on exemple de **Planification de ressources**, qui consiste a utiliser des ressources $\{R_1, \ldots, R_m\}$ afin de maximiser le profit gagné par certains produit.

- Dans la **programmation linéaire** la notion de **dualité** implique que chaque problème peut être analyses de deux différents méthodes.
- Ces deux méthodes doivent mener la même **solution optimale**.
- Pour chaque LP, on peut formuler un deuxième problème appelé **Problème dual** et qui mène a la même solution.
- On considère on exemple de **Planification de ressources**, qui consiste a utiliser des ressources $\{R_1, \ldots, R_m\}$ afin de maximiser le profit gagné par certains produit.
  - Maximiser le gain tout en respectant les limites de temps.

- Dans la **programmation linéaire** la notion de **dualité** implique que chaque problème peut être analyses de deux différents méthodes.
- Ces deux méthodes doivent mener la même **solution optimale**.
- Pour chaque LP, on peut formuler un deuxième problème appelé **Problème dual** et qui mène a la même solution.
- On considère on exemple de **Planification de ressources**, qui consiste a utiliser des ressources $\{R_1, \dots, R_m\}$ afin de maximiser le profit gagné par certains produit.
  - Maximiser le gain tout en respectant les limites de temps.
  - Minimiser le temps d'utilisation des ressources, tout en assurant un **gain minimal**.

On considère le problème LP suivant:

$$\begin{cases} \text{max} & \mathbf{Z_x} = \mathbf{c_1} x_1 + \mathbf{c_2} x_2 + \ldots + \mathbf{x_n} x_n & \\ \text{s.t} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n & \leqslant b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n & \leqslant b_2 \\ & \vdots & \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n & \leqslant b_m \\ & x_i \geqslant 0 & \end{cases}$$

Formulation dual d'un LP

On considère le problème LP suivant:

$$
\begin{cases}
\text{max} & Z_x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + x_nx_n & \\
\text{s.t} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leqslant b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leqslant b_2 \\
 & \vdots & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leqslant b_m \\
 & x_i \geqslant 0 &
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\text{min} & Z_y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m & \\
\text{s.t} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m & \geqslant c_1 \\
 & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m & \geqslant c_2 \\
 & \vdots & \\
 & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m & \geqslant c_n \\
 & y_i \geqslant 0 &
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \max & c^T \cdot x \\ \text{s.t} & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \min & b^T \cdot y \\ \text{s.t} & A^T y \geqslant c \\ & y \geqslant 0 \end{cases}$$

- Remarquer la différence dans les tailles des deux problèmes.

$$\begin{cases} \max & c^T \cdot x \\ \text{s.t} & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min & b^T \cdot y \\ \text{s.t} & A^T y \geqslant c \\ & y \geqslant 0 \end{cases}$$

- Remarquer la différence dans les tailles des deux problèmes.
- Le problème **primal** possède n variables et m contraintes.

Transformation forme matricielle

$$\begin{cases} \max & c^T \cdot x \\ \text{s.t} & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min & b^T \cdot y \\ \text{s.t} & A^T y \geqslant c \\ & y \geqslant 0 \end{cases}$$

- Remarquer la différence dans les tailles des deux problèmes.
- Le problème **primal** possède n variables et m contraintes.
- Le problème **dual** a par contre m variables et n contraintes.

Résumé

Table: Relations générales entre un problème et son dual

Si le primal a	**Alors le dual**
Maximisation d'objective	Minimisation d'objective.
j ieme variable x_j	j ieme contrainte.
i ieme contrainte	i ieme variable y_i
x_i sans contrainte	contrainte d'égalité $(=)$
Contrainte i avec $(=)$	y_i sans contrainte
Contrainte avec $\leqslant$	Contrainte avec $\geqslant$.

$$
(P_1)\begin{cases}
\text{max} & Z_x = x_1 - x_2 + 3x_3 & \\
\text{s.t} & x_1 + x_2 + x_3 & \leqslant 10 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 & \leqslant 2 \\
& 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 & \leqslant 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant & 0
\end{cases}
$$

$$
(P_1)\begin{cases}
\text{max} & Z_x = x_1 - x_2 + 3x_3 & \\
\text{s.t} & x_1 + x_2 + x_3 & \leqslant 10 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 & \leqslant 2 \\
 & 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 & \leqslant 6 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geqslant & 0
\end{cases}
$$

$$
(D_1)\begin{cases}
\text{min} & Z_y = 10y_1 + 2y_2 + 6y_3 & \\
\text{s.t} & y_1 + 2y_2 + 2y_3 & \geqslant 1 \\
 & y_1 - y_2 - 2y_3 & \geqslant -1 \\
 & y_1 - y_2 - 3y_3 & \geqslant 3 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geqslant & 0
\end{cases}
$$

Exemple II

$$
(P_2)\begin{cases}
\text{min} \quad Z_x = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & \\
\text{s.t} \quad 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 & \geqslant 7 \\
6x_1 + x_2 + 3x_3 & \geqslant 4 \\
7x_1 - 2x_2 - x_3 & \leqslant 10 \\
x_1 - 2x_2 + 5x_3 & \geqslant 3 \\
4x_1 + 7x_2 - 2x_3 & \geqslant 2 \\
x_1, x_2, x_3 & \geqslant 0
\end{cases}
$$

$$(P_2)\left\{\begin{array}{llrl} \min & Z_x = & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & \\ \text{s.t} & & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 & \geqslant 7 \\ & & 6x_1 + x_2 + 3x_3 & \geqslant 4 \\ & & 7x_1 - 2x_2 - x_3 & \leqslant 10 \\ & & x_1 - 2x_2 + 5x_3 & \geqslant 3 \\ & & 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 & \geqslant 2 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geqslant 0 \end{array}\right.$$

$$(D_2)\left\{\begin{array}{llrl} \max & Z_y = & 7y_1 + 4y_2 - 10y_3 + 3y_4 + 2y_5 & \\ \text{s.t} & & 3y_1 + 6y_2 - 7y_3 + y_4 + 4y_5 & \leqslant 3 \\ & & 5y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 + 7y_5 & \leqslant -2 \\ & & 4y_1 + 3y_2 + y_3 + 5y_4 - 2y_5 & \leqslant 4 \\ & & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 & \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Exemple III

$$
(P_3) \begin{cases}
\text{min} & Z_x = x_1 - 3x_2 - 2x_3 & \\
\text{s.t} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 & \leqslant 7 \\
 & 2x_1 - 4x_2 & \geqslant 12 \\
 & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 & = 10 \\
 & x_1, x_2 & \geqslant 0
\end{cases}
$$

$$(P_3)\begin{cases} \min & Z_x = x_1 - 3x_2 - 2x_3 & \\ \text{s.t} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 & \leqslant 7 \\ & 2x_1 - 4x_2 & \geqslant 12 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 & = 10 \\ & x_1, x_2 & \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(D_3)\begin{cases} \max & Z_y = -7y_1 + 12y_2 + 10y_3 & \\ \text{s.t} & -3y_1 + 2y_2 - 4y_3 & \leqslant 1 \\ & y_1 - 4y_2 + 3y_3 & \leqslant -3 \\ & -2y_1 + 8y_3 & \leqslant -2 \\ & y_1, y_2 & \geqslant 0 \end{cases}$$

Relation entre Dual et Primal

1. Le dual du dual d'un problème est le problème **primal**.

Relation entre Dual et Primal

1. Le dual du dual d'un problème est le problème **primal**.
2. Si l'un des problèmes est **non borné**, alors l'autre et **non réalisable**.

Relation entre Dual et Primal

1. Le dual du dual d'un problème est le problème **primal**.
2. Si l'un des problèmes est **non borné**, alors l'autre et **non réalisable**.
3. Si l'un des problèmes admet une solution optimale, alors son dual admet la même solution optimale.
$$\max Z_x = \min Z_y$$

1. Le dual du dual d'un problème est le problème **primal**.
2. Si l'un des problèmes est **non borné**, alors l'autre et **non réalisable**.
3. Si l'un des problèmes admet une solution optimale, alors son dual admet la même solution optimale.

$$\max Z_x = \min Z_y$$

Problème dual(Max)	Problème Primal (Min)	
	Réalisable	Non Réalisable
Réalisable	$\max Z_y = \min Z_x$	$\max Z_y \to \infty$
Non Réalisable	$\min Z_x \to -\infty$	non realisable on non borne

Théorème

Si on note

- x^* la solution **optimale** du problème primal (P).
- y^* la solution optimale du problème dual (D).

Alors on a la relation suivante:

$$y^*(Ax - b) = 0 \quad \text{et} \quad x^*(A^T y - c) = 0;$$

Ainsi on peut en déduire les remarques suivantes:

- Pour chaque variable de base du primal, correspond une contrainte **saturée** du dual.
- Si une contrainte du primal est **non saturée**, alors la variables correspondante dans le dual est **nulle**.

Profit marginal

Définition

La variables y_i^* est appelé **valeur marginale** de la ressource i. On trouve aussi dans la littérature le nom:

- **prix fictif**.
- **Multiplicateur de simplexe**.

Profit marginal

Définition

La variables y_i^* est appelé **valeur marginale** de la ressource i.
On trouve aussi dans la littérature le nom:

- **prix fictif**.
- **Multiplicateur de simplexe**.

Il représente la **cout maximal** qu'il faut payer pour une unité additionnelle de la ressource i.

Définition

La variables y_i^* est appelé **valeur marginale** de la ressource i. On trouve aussi dans la littérature le nom:

- **prix fictif**.
- **Multiplicateur de simplexe**.

Il représente la **cout maximal** qu'il faut payer pour une unité additionnelle de la ressource i.

Théorème

Dans l'optimum des deux programmes primal et dual, la valeur d'une variable principale est égale a **l'oppose** du profit marginal de la variable d'écarts qui lui est associée.

Exemple

On considre le programme suivant:

$$(P)\begin{cases} \max & Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.t} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 90 \,(\text{Opération 1}) \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 60 \,(\text{Opération 2}) \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 80 \,(\text{Opération 3}) \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

		$c_j \rightarrow$	3	4	1	0	0	0
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* x_B (= b)	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
4	x_2	40	0	1	10/6	4/6	– 1/3	0
3	x_1	10	1	0	– 1/3	– 1/3	2/3	0
0	s_3	10	0	0	8/6	8/6	– 10/6	1
Z = 190		$c_j - z_j$	0	0	– 28/6	– 10/6	– 2/3	0

Figure: Illustration des cout marginal dans le tableau simplexe

- La solution optimale est $(10, 40, 0)$.
- La variable $s_3 = 10$, Ainsi la **ressource 3** n'est pas complètement utilisée.

Interprétation des variables duales

		$c_j \rightarrow$	*3*	*4*	*1*	*0*	*0*	*0*
Basic Variables Coefficient $\boldsymbol{c_B}$	*Basic Variables* $\boldsymbol{B}$	*Basic Variables Value* $\boldsymbol{x_B}$ (= $\boldsymbol{b}$)	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
4	x_2	40	0	1	10/6	4/6	– 1/3	0
3	x_1	10	1	0	– 1/3	– 1/3	2/3	0
0	s_3	10	0	0	8/6	8/6	– 10/6	1
Z = 190		$c_j - z_j$	0	0	– 28/6	– 10/6	– 2/3	0

Figure: Illustration des cout marginal dans le tableau simplexe

Interprétation des variables duales

		$c_j \rightarrow$	*3*	*4*	*1*	*0*	*0*	*0*
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* x_B (= b)	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
4	x_2	40	0	1	10/6	4/6	– 1/3	0
3	x_1	10	1	0	– 1/3	– 1/3	2/3	0
0	s_3	10	0	0	8/6	8/6	– 10/6	1
$Z = 190$		$c_j - z_j$	0	0	– 28/6	– 10/6	– 2/3	0

Figure: Illustration des cout marginal dans le tableau simplexe

- **L'oppose** des valeurs $c_j - z_j$ représente la solution optimale des cout marginaux. Ainsi la solution du dual sera donnée par:

$$y_1 = \frac{10}{6} \quad y_2 = \frac{2}{3} \quad y_3 = 0 \quad \text{et} \quad \min Z_y = 190$$

Interprétation des variables duales

		$c_j \rightarrow$	3	4	1	0	0	0
Basic Variables Coefficient c_B	Basic Variables B	Basic Variables Value x_B (= b)	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
4	x_2	40	0	1	10/6	4/6	– 1/3	0
3	x_1	10	1	0	– 1/3	– 1/3	2/3	0
0	s_3	10	0	0	8/6	8/6	– 10/6	1
Z = 190		$c_j - z_j$	0	0	– 28/6	– 10/6	– 2/3	0

Figure: Illustration des cout marginal dans le tableau simplexe

- **L'oppose** des valeurs $c_j - z_j$ représente la solution optimale des cout marginaux. Ainsi la solution du dual sera donnée par:

$$y_1 = \frac{10}{6} \quad y_2 = \frac{2}{3} \quad y_3 = 0 \quad \text{et} \quad \min Z_y = 190$$

- Pour interpréter cette valeur, on considère $y_1 = 1.66$. Cette valeur représente le gain maximal de la ressource (opération I). Ainsi chaque unité de cette ressource augmentera le profit par 1.66.

Une entreprise fournit deux produits (**A** et **B**) sur deux machines (I, et II). Le temps disponible de chaque machine et le temps de chaque produit est résume dans le tableau suivant:

Machine	*Product*		*Available Hours*
	A	*B*	
I	30	20	300
II	5	10	110
Profit per unit (Rs)	6	8	

1. Donner la solution optimale pour le profit.
2. Quel est le cout marginal de chaque machine?

Exemple cout marginal

$$
(P)\begin{cases}
\max & Z_x = 6x_1 + 8x_2 & \\
\text{s.t} & 30x_1 + 20x_2 & \leqslant 300 \\
& 5x_1 + 10x_2 & \leqslant 100 \\
& x_1, x_2 & \geqslant 0
\end{cases}
\qquad
(D)\begin{cases}
\min & Z_y = 300y_1 + 110y_2 & \\
\text{s.t} & 30y_1 + 5y_2 & \geqslant 6 \\
& 20y_1 + 10y_2 & \geqslant 8 \\
& y_1, y_2 & \geqslant 0
\end{cases}
$$

$$
(P)\begin{cases}
\max & Z_x = 6x_1 + 8x_2 & \\
\text{s.t} & 30x_1 + 20x_2 & \leqslant 300 \\
& 5x_1 + 10x_2 & \leqslant 100 \\
& x_1, x_2 & \geqslant 0
\end{cases}
\qquad
(D)\begin{cases}
\min & Z_y = 300y_1 + 110y_2 & \\
\text{s.t} & 30y_1 + 5y_2 & \geqslant 6 \\
& 20y_1 + 10y_2 & \geqslant 8 \\
& y_1, y_2 & \geqslant 0
\end{cases}
$$

		$c_j \rightarrow$	6	8	0	0
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* x_B (= b)	x_1	x_2	s_{1p}	s_{2p}
6	x_1	4	1	0	1/20	– 1/10
8	x_2	9	0	1	– 1/10	3/20
$Z = 96$		$c_j - z_j$	0	0	– 1/10	– 6/10

Figure: Tableau de la methode de simplexe

Exemple cout marginal

$$(P)\begin{cases} \max & Z_x = 6x_1 + 8x_2 & \\ \text{s.t} & 30x_1 + 20x_2 & \leqslant 300 \\ & 5x_1 + 10x_2 & \leqslant 100 \\ & x_1, x_2 & \geqslant 0 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \min & Z_y = 300y_1 + 110y_2 & \\ \text{s.t} & 30y_1 + 5y_2 & \geqslant 6 \\ & 20y_1 + 10y_2 & \geqslant 8 \\ & y_1, y_2 & \geqslant 0 \end{cases}$$

		$c_j \rightarrow$	*6*	*8*	*0*	*0*
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $x_B\ (= b)$	x_1	x_2	s_{1p}	s_{2p}
6	x_1	4	1	0	1/20	– 1/10
8	x_2	9	0	1	– 1/10	3/20
$Z = 96$		$c_j - z_j$	0	0	– 1/10	– 6/10

Figure: Tableau de la methode de simplexe

- La valeur $\frac{1}{10}$ indique la gain de chaque heure de la machine I dans le profit.
- Ainsi, la machine contribue au gain maximal par $\frac{3}{5}$.