Pogrammation Lineaire: Methode de Simplexe

A.Belcaid

ENSA-Safi

April 5, 2022

- Etude **algorithmique** de la resolution d'un Programme Lineaire (LP).
- L'algorithme de reference est **l'algorithme de Simplexe**.
  - Develope par **George Dantzig** en 1947.
  - Point de depart de toutel a recherche operationnelle.
  - Existe dans la ma majorite des solveurs payants.
- Methode generale.
  - Introduction de la **forme standard** d'un LP.
  - Etude de la methode Simplexe pour LP.

- Tout d'abord on introduit la notion de **Point extreme**:

- Tout d'abord on introduit la notion de **Point extreme**:

Definition

Pour un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$, un point x est dit **extreme** s'il ne peut pas etre ecrit comme **combinaison convexe** de deux autres pointes.
On ne peut pas trouver deux points $x_1, x_2 \in S$ et $\lambda \in (0, 1)$ tel que

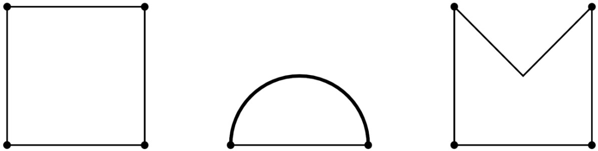
$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$$

- Tout d'abord on introduit la notion de **Point extreme**:

Definition

Pour un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$, un point x est dit **extreme** s'il ne peut pas etre ecrit comme **combinaison convexe** de deux autres pointes.
On ne peut pas trouver deux points $x_1, x_2 \in S$ et $\lambda \in (0, 1)$ tel que

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$



- Pour chaque LP, on a la propriete suivante:

Proposition

Pour chaque LP, s'il existe un solution optimale, alors il y as forcement un **point extreme optimal**.

- Pour chaque LP, on a la propriete suivante:

Proposition

Pour chaque LP, s'il existe un solution optimale, alors il y as forcement un **point extreme optimal**.

  - Attention, ceci ne peut pas dire que **si une solution est optimale, alors c'est un point extreme**.

- Cette propriete constitue le **noyau** de la methode de simplexe.

- Premierement, on definit la **forme standard**:

Definition

Un LP est dans la **forme standard** si:

- Tous les second membres sont **positifs**.
- Tous les variables de decision sont **positifs**.
- Toutes les **contraintes** sont des **egalites**.

- Un second membre est la valeur b qui intervient dans des contraintes de type:

$$g(x) \leqslant b \quad g(x) \geqslant b \quad g(x) = b$$

- On n'as pas de restriction sur la **fonction objective**.

1. Se debarasser des second membre **negatifs**:
   - Si un second membre est **negatif**, changer des leux membres.
   - **Exemple**:

     $$2x_1 + 3_x 2 \leqslant -4$$

     est equivalent a

1. Se debarasser des second membre **negatifs**:
   - Si un second membre est **negatif**, changer des leux membres.
   - **Exemple**:

$$2x_1 + 3_x 2 \leqslant -4$$

est equivalent a

$$-2x_1 - 3x_2 \geqslant 4$$

2. **Variables de decision non negatives**
   - Si x est **non positive**, la remplacer par $-x$.

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 4 \ , \ x \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x_1 + 3x_2 \leqslant 4 \ , \ x_1 \geqslant 0$$

1. Se debarasser des second membre **negatifs**:
   - Si un second membre est **negatif**, changer des leux membres.
   - **Exemple**:
     $$2x_1 + 3_x2 \leqslant -4$$
     est equivalent a
     $$-2x_1 - 3x_2 \geqslant 4$$
2. **Variables de decision non negatives**
   - Si x est **non positive**, la remplacer par $-x$.
     $$2x_1 + 3x_2 \leqslant 4\ ,\ x \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x_1 + 3x_2 \leqslant 4\ ,\ x_1 \geqslant 0$$
   - Si x est **libre**, la remplacer par $x^{'} - x^{''}$, ou $\mathbf{x}^{'}, \mathbf{x}^{''} \geqslant \mathbf{0}$

1. Se debarasser des second membre **negatifs**:
   - Si un second membre est **negatif**, changer des leux membres.
   - **Exemple**:

     $$2x_1 + 3_x 2 \leqslant -4$$

     est equivalent a

     $$-2x_1 - 3x_2 \geqslant 4$$

2. **Variables de decision non negatives**
   - Si x est **non positive**, la remplacer par $-x$.

     $$2x_1 + 3x_2 \leqslant 4\ ,\ x \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x_1 + 3x_2 \leqslant 4\ ,\ x_1 \geqslant 0$$

   - Si x est **libre**, la remplacer par $x^{'} - x^{''}$, ou $\mathbf{x}^{'}, \mathbf{x}^{''} \geqslant \mathbf{0}$

     $$2x_1 + 3x_2 \leqslant 4\ ,\ x_1 \text{ libre} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^{'} - 2x^{''} + 3x_2 \leqslant 4\ ,\ x^{'} \geqslant 0\ ,\ x^{''} \geqslant 0$$

x	$x^{'}$	$x^{''}$
5	5	0
0	0	0
-8	0	8

3. **Contraintes Egalite**
   - On ajoute alors des **variables d'ecart**

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4\ ,\ x_3 \geqslant 0;$$

3. **Contraintes Egalite**
   - On ajoute alors des **variables d'ecart**

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 4 \iff 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \;,\; x_3 \geqslant 0;$$

   - De meme pour une inegalite $\geqslant$.

$$2x_1 + 3x_2 \geqslant 4 \iff 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \;,\; x3 \geqslant 0$$

   - Pratiquement, une variable **d'ecart** mesure la difference entre les deux membres.

4. La fonction **objective** peut etre min ou max.

3. Contraintes Egalite

- On ajoute alors des **variables d'ecart**

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4\ ,\ x_3 \geqslant 0;$$

- De meme pour une inegalite $\geqslant$.

$$2x_1 + 3x_2 \geqslant 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4\ ,\ x3 \geqslant 0$$

- Pratiquement, une variable **d'ecart** mesure la difference entre les deux membres.

4. La fonction **objective** peut etre min ou max.

title

Pour un probleme standard, on doit chercher maintenant que les **points extremes!!!**

- On considere le LP avec m contraintes et n variables

$$\begin{cases} \text{min} & C^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

  - On va assumer que le rang$(\mathbf{A}) = m$[1].
  - Ceci implique que $m \leqslant n$. Le probleme avec $n = m$ est **trivial**. Ainsi on suppose que $m < n$.

[1]Toutesles lignes de A sont independents

Solution basique

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.

Solution basique

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Solution basique

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
    - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Solution basique

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

Solution basique

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

- Les $n - m$ variables qui sont nuls sont appeles **variables hors base**.

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

- Les $n - m$ variables qui sont nuls sont appeles **variables hors base**.
- Les m variables restants sont dit **variables de base**.

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

- Les $n - m$ variables qui sont nuls sont appeles **variables hors base**.
- Les m variables restants sont dit **variables de base**.
- La **base** est formee par les m variables de base.

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

- Les $n - m$ variables qui sont nuls sont appeles **variables hors base**.
- Les m variables restants sont dit **variables de base**.
- La **base** est formee par les m variables de base.
- Ils forment une matrice $m \times m$ **reguliere** qu'on note A_B. dit

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

- Les $n - m$ variables qui sont nuls sont appeles **variables hors base**.
- Les m variables restants sont dit **variables de base**.
- La **base** est formee par les m variables de base.
- Ils forment une matrice $m \times m$ **reguliere** qu'on note A_B. dit

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

  - Les $n - m$ variables qui sont nuls sont appeles **variables hors base**.
  - Les m variables restants sont dit **variables de base**.
  - La **base** est formee par les m variables de base.
  - Ils forment une matrice $m \times m$ **reguliere** qu'on note A_B. dit

- On note alors $x_b \in \mathbb{R}^m$ et $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$, les variables de base (hors base).

- Le systeme $Ax = b$, possede plus de colonnes que des lignes.
  - Ainsi, on peut **selectionner** des colonnes pour former la alert**solution basique**.

Definition

Une **solution basique** a un probleme LP standard eest une solution qui:

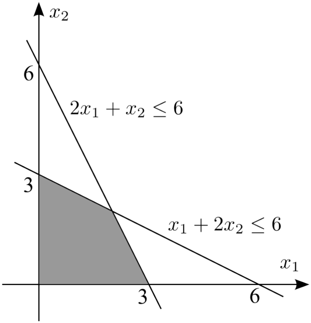
1. Possedent $n - m$ qui sont **nuls**.
2. Verifie l'equation $Ax = b$.

- Les $n - m$ variables qui sont nuls sont appeles **variables hors base**.
- Les m variables restants sont dit **variables de base**.
- La **base** est formee par les m variables de base.
- Ils forment une matrice $m \times m$ **reguliere** qu'on note A_B. dit

- On note alors $x_b \in \mathbb{R}^m$ et $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$, les variables de base (hors base).
  - On a alors $x_n = 0$ et $x_b = A_B^{-1}b$.

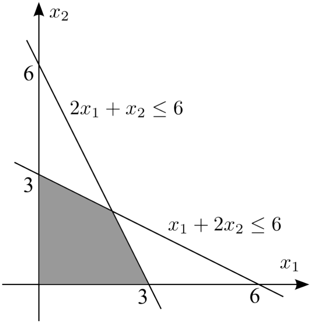
- On considere le probleme LP

$$\begin{cases} \min & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & xi \geqslant 0 \ \forall i = 1, 2 \end{cases}$$



- On considere le probleme LP

$$\begin{cases} \min & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & xi \geqslant 0\ \forall i = 1,2 \end{cases}$$



- Il as pour forme standard:

$$\begin{cases} \min & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & xi \geqslant 0\ \forall i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.
  - On as alors $n - m = 2$ variables hors base.

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.
  - On as alors $n - m = 2$ variables hors base.
  - Et $m = 2$ variables de base.

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.
  - On as alors $n - m = 2$ variables hors base.
  - Et $m = 2$ variables de base.
- Les etapes pour obtenir la solution de base.

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.
  - On as alors $n - m = 2$ variables hors base.
  - Et $m = 2$ variables de base.
- Les etapes pour obtenir la solution de base.
  - Determiner un ensemble m de variables qui vont former la base B.

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.
  - On as alors $n - m = 2$ variables hors base.
  - Et $m = 2$ variables de base.
- Les etapes pour obtenir la solution de base.
  - Determiner un ensemble m de variables qui vont former la base B.
  - Metter les variables hors base a zero: $x_N = 0$.

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.
  - On as alors $n - m = 2$ variables hors base.
  - Et $m = 2$ variables de base.
- Les etapes pour obtenir la solution de base.
  - Determiner un ensemble m de variables qui vont former la base B.
  - Metter les variables hors base a zero: $x_N = 0$.
  - Resoudre le systeme de taille m, qui est $A_B x_B = b$ pour les variables de base.

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.
  - On as alors $n - m = 2$ variables hors base.
  - Et $m = 2$ variables de base.
- Les etapes pour obtenir la solution de base.
  - Determiner un ensemble m de variables qui vont former la base B.
  - Metter les variables hors base a zero: $x_N = 0$.
  - Resoudre le systeme de taille m, qui est $A_B x_B = b$ pour les variables de base.
  - Les variables restants seront les variables hors base N.

Exemple

- Dans cet exemple standard, $m = 2$ et $n = 4$.
  - On as alors $n - m = 2$ variables hors base.
  - Et $m = 2$ variables de base.
- Les etapes pour obtenir la solution de base.
  - Determiner un ensemble m de variables qui vont former la base B.
  - Metter les variables hors base a zero: $x_N = 0$.
  - Resoudre le systeme de taille m, qui est $A_B x_B = b$ pour les variables de base.
  - Les variables restants seront les variables hors base N.
- Pour note exemple, chaque systeme sera de taille $\mathbf{2}$.

Exemple

- Les deux inegatlites sont:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

- On essaie $B = (x_1, x_2)$ et $N = (x_3, x_4)$:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 6 \end{array}$$

Exemple

- Les deux inegatlites sont:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

- On essaie $B = (x_1, x_2)$ et $N = (x_3, x_4)$:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 6 \end{array}$$

  La solution est $(x_1, x_2) = (2, 2)$. Ainsi la solution qui correspond a cette base B est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 0, 0)$.

- On essaie alors une autre base $B = (x_2, x_3)$ et $N = (x_1, x_4)$:

Exemple

- Les deux inegatlites sont:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

- On essaie $B = (x_1, x_2)$ et $N = (x_3, x_4)$:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 6 \end{array}$$

La solution est $(x_1, x_2) = (2, 2)$. Ainsi la solution qui correspond a cette base B est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 0, 0)$.

- On essaie alors une autre base $B = (x_2, x_3)$ et $N = (x_1, x_4)$:

$$\begin{array}{ccccc} 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_2 & & & = & 6 \end{array}$$

qui correspond as la solution $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 6, -6, 0)$.

- En general, on soit choisir m parmi un ensemble de n variables. Ainsi on a C_m^n bases a choisir.
- Pour notre exemple, on as alors $C_2^4 = 6$ bases.
- On peut examiner toutes les bases, on trouve alors:

B	x_1	x_2	x_3	x_4
(x_1, x_2)	2	2	0	0
(x_1, x_3)	3	0	3	0
(x_1, x_4)	6	0	0	-6
(x_2, x_3)	0	6	-6	0
(x_2, x_4)	0	3	0	3
(x_3, x_4)	0	0	6	6

Solution Basique realisable

- On doit **filtrer** les solutions realisables parmi les solutions de base.

- On appelle ces solutions, des **solutions de bases realisables.**

- On doit **filtrer** les solutions realisables parmi les solutions de base.
  - Par definition, les solutions de base verifient $Ax = b$.

- On appelle ces solutions, des **solutions de bases realisables.**

Definition

Une solution de base realisable d'un probleme LP est une solution de base dont toutes les variables sont **non negatives**.

B	x_1	x_2	x_3	x_4
(x_1, x_2)	2	2	0	0
(x_1, x_3)	3	0	3	0
(x_1, x_4)	6	0	0	-6
(x_2, x_3)	0	6	-6	0
(x_2, x_4)	0	3	0	3
(x_3, x_4)	0	0	6	6

Solution Basique realisable

- On doit **filtrer** les solutions realisables parmi les solutions de base.
  - Par definition, les solutions de base verifient $Ax = b$.
  - Ainsi pour qu'ils soient realisable, ils doivent verifier $x \leqslant 0$.
- On appelle ces solutions, des **solutions de bases realisables.**

Definition

Une solution de base realisable d'un probleme LP est une solution de base dont toutes les variables sont **non negatives**.

B	x_1	x_2	x_3	x_4
(x_1, x_2)	2	2	0	0
(x_1, x_3)	3	0	3	0
(x_1, x_4)	6	0	0	-6
(x_2, x_3)	0	6	-6	0
(x_2, x_4)	0	3	0	3
(x_3, x_4)	0	0	6	6

- Pourqu'oi les Solution de base realisable (SBR) sont imporants? Ils sont juste des points extremes!.

Theoreme

Pour un LP standard, un point extreme est une solution ssi c'est une solution de base realisable de cet LP.

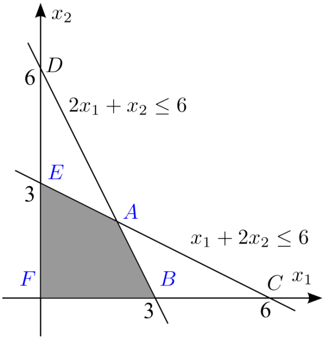
- L'implication directe est:

Theoreme

Pour un LP standard, s'il accepte une solution optimale, alors il y as forcement une solution de base realisable.

- Il y as un **isomorphisme** entre les SBR et les points extremes.

B	SBR?	Point	x_1	x_2	x_3	x_4
(x_1, x_2)	Oui	A	2	2	0	0
(x_1, x_3)	Oui	B	3	0	3	0
(x_1, x_4)	No	C	6	0	0	-6
(x_2, x_3)	No	D	0	6	-6	0
(x_2, x_4)	Oui	E	0	3	0	3
(x_3, x_4)	Oui	F	0	0	6	6



- Pour chercher une solution opitmale:
  - Au lieu de chercher toutes les points extremes, on cherche dans les SBR.
  - Pourquoi' un point extreme est une notion **geometrique**, alors que les SBR sont **algebriques**[2].
- Pour chercher la meilleure solution SBR, on **se deplace** entre les solutions **adjacents**:

Definition

Deux bases sont **adjacents** si elle differe seulement en une seule variale de base. Ainsi deux SBR sont adjacents si leurs bases sont adjacents.

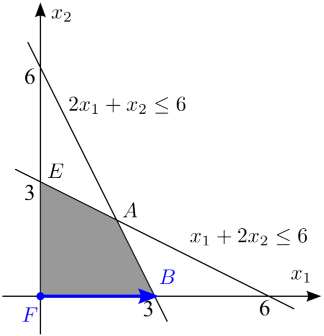
- On montre ceci par une illustration:

[2] peuvent etre programmes facilement

Solution de base Adjacents

- Une pair de SBR adjacents correspendent a une deux points extremes **adjacents**. (i.e.) deux point dans la meme frontiere
- Passer entre ces deux solutions consiste a ce **deplacer dans cette frontiere**.

B	Point	x_1	x_2	x_3	x_4
(x_1, x_2)	A	2	2	0	0
(x_1, x_3)	B	3	0	3	0
(x_2, x_4)	E	0	3	0	3
(x_3, x_4)	F	0	0	6	6



Schema de recherche

- Avec tous ces **concepts**, comment chercher la meilleure SBR?

- Avec tous ces **concepts**, comment chercher la meilleure SBR?
- Dans chaque SBR, se deplacer dans une solution **ajdacentes** qui doit etre **meilleure**!

Schema de recherche

- Avec tous ces **concepts**, comment chercher la meilleure SBR?
- Dans chaque SBR, se deplacer dans une solution **ajdacentes** qui doit etre **meilleure**!
  - Dans le voisinage de cette SBR, il doit avoir une direction pour ameliorer l'bojectif.

- Avec tous ces **concepts**, comment chercher la meilleure SBR?
- Dans chaque SBR, se deplacer dans une solution **ajdacentes** qui doit etre **meilleure**!
  - Dans le voisinage de cette SBR, il doit avoir une direction pour ameliorer l'bojectif.
  - En cas contraire, c'est une solution **optimal**.

Schema de recherche

- Avec tous ces **concepts**, comment chercher la meilleure SBR?
- Dans chaque SBR, se deplacer dans une solution **ajdacentes** qui doit etre **meilleure**!
  - Dans le voisinage de cette SBR, il doit avoir une direction pour ameliorer l'bojectif.
  - En cas contraire, c'est une solution **optimal**.
- Prochaine section, introduit la **methode de simplexe** qui regroupe toutes ces idees.

Idee simplexe

- Variables Entrante/Sortante
  - Choisir une variable hors base, qui doit **entrer**.[3].
  - Augmenter la valeur de cette variable (entrante).
  - Tant que cette variables augmente, nous identifions la variable de base qui decroit et on s'arrette quand elle touche a 0.

    .
  - Cette variable devient alors **hors base**.
- On continue a changer la base, jusqu'as trouver une base optimale.

[3] doit etre non nulle

- On va appliquer les notions algebrique de la methode de **Simplexe**. Soit l'LP

$$\begin{cases} \text{min} & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & xi \geqslant 0 \ \forall i = 1, 2 \end{cases}$$

- On va appliquer les notions algebrique de la methode de **Simplexe**. Soit l'LP

$$\begin{cases} \min & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & xi \geqslant 0 \ \forall i = 1, 2 \end{cases}$$

- Il as pour forme standard:

$$\begin{cases} \min & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & xi \geqslant 0 \ \forall i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

- On doit suivre l'evoluton de la **fonction objective**.
  - On cherche a ameliorer toujours cette solution.
  - On denote $z = 2x_1 + 3x_2$ la valeur de la fonction objective.
  - Cette valeur est appelle **La valeur z**.
- On doit garder dans l'esprit qu'on
  - Chercher a maximiser z.
  - Tous les variables (sauf z) sont non negatives.

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

  - On remarque que $z = 2x_1 + 3x_2$ est exprimee comme $z - 2x_1 - 3x_2 = 0$.
  - On appelle cette contrainte la **contrainte 0**.

- Tout d'abord, on doit choisir une solution de base realisable.

- Tout d'abord, on doit choisir une solution de base realisable.
- Si on investit le systeme on pourra prendre:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

Choix d'une solution de base

- Tout d'abord, on doit choisir une solution de base realisable.
- Si on investit le systeme on pourra prendre:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

  - Avec ce choix on obtient une **matrice identite** $A_B = I$.

Choix d'une solution de base

- Tout d'abord, on doit choisir une solution de base realisable.
- Si on investit le systeme on pourra prendre:

$$\begin{array}{cccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

  - Avec ce choix on obtient une **matrice identite** $A_B = I$.
  - Ainsi on trouve que

$$x_b = A_b^{-1} b = Ib = b \geqslant 0$$

.

Amelioration de la solution.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.

Amelioration de la solution.

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.
- On doit se deplacer maintenant, on doit choisir une variable qui **entre**, x_1 ou x_2?

Amelioration de la solution.

$$\begin{array}{ccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.
- On doit se deplacer maintenant, on doit choisir une variable qui **entre**, x_1 ou x_2?
  - La **contrainte 0**, nous dit que les deux peuvent entrer car ils vont augmenter la valeur de z.

Amelioration de la solution.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.
- On doit se deplacer maintenant, on doit choisir une variable qui **entre**, x_1 ou x_2?
  - La **contrainte 0**, nous dit que les deux peuvent entrer car ils vont augmenter la valeur de z.
  - On peut choisir alors x_1.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.
- On doit se deplacer maintenant, on doit choisir une variable qui **entre**, x_1 ou x_2?
  - La **contrainte 0**, nous dit que les deux peuvent entrer car ils vont augmenter la valeur de z.
  - On peut choisir alors x_1.
- Une question importante: Quand est ce qu'on s'arrete?

Amelioration de la solution.

$$\begin{array}{ccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0,0,6,8)$ et $z_1 = 0$.
- On doit se deplacer maintenant, on doit choisir une variable qui **entre**, x_1 ou x_2?
  - La **contrainte 0**, nous dit que les deux peuvent entrer car ils vont augmenter la valeur de z.
  - On peut choisir alors x_1.
- Une question importante: Quand est ce qu'on s'arrete?
  1. $(0,0,6,8) \to (1,0,5,6) \to (2,0,4,4) \to \ldots$. On remarque que x_2 est toujours nulle.

Amelioration de la solution.

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0,0,6,8)$ et $z_1 = 0$.
- On doit se deplacer maintenant, on doit choisir une variable qui **entre**, x_1 ou x_2?
  - La **contrainte 0**, nous dit que les deux peuvent entrer car ils vont augmenter la valeur de z.
  - On peut choisir alors x_1.
- Une question importante: Quand est ce qu'on s'arrete?
  1. $(0,0,6,8) \to (1,0,5,6) \to (2,0,4,4) \to \ldots$. On remarque que x_2 est toujours nulle.
  2. On s'arrete a $(4,0,2,0)$ quand x_4 **s'annulle**.

Amelioration de la solution.

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.
- On doit se deplacer maintenant, on doit choisir une variable qui **entre**, x_1 ou x_2?
  - La **contrainte 0**, nous dit que les deux peuvent entrer car ils vont augmenter la valeur de z.
  - On peut choisir alors x_1.
- Une question importante: Quand est ce qu'on s'arrete?
  1. $(0, 0, 6, 8) \to (1, 0, 5, 6) \to (2, 0, 4, 4) \to \ldots$. On remarque que x_2 est toujours nulle.
  2. On s'arrete a $(4, 0, 2, 0)$ quand x_4 **s'annulle**.
  3. Ceci est indique par le deuxieme membre

$$\frac{8}{2} < \frac{6}{1}$$

Amelioration de la solution.

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On commence avec une la solutionj $x^1 = (0,0,6,8)$ et $z_1 = 0$.
- On doit se deplacer maintenant, on doit choisir une variable qui **entre**, x_1 ou x_2?
  - La **contrainte 0**, nous dit que les deux peuvent entrer car ils vont augmenter la valeur de z.
  - On peut choisir alors x_1.
- Une question importante: Quand est ce qu'on s'arrete?
  1. $(0,0,6,8) \to (1,0,5,6) \to (2,0,4,4) \to \ldots$. On remarque que x_2 est toujours nulle.
  2. On s'arrete a $(4,0,2,0)$ quand x_4 **s'annulle**.
  3. Ceci est indique par le deuxieme membre

$$\frac{8}{2} < \frac{6}{1}$$

  4. Ainsi on se deplace vers $x^2 = (4,0,2,0)$ avec $z_2 = 8$.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
    - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.

Amelioration solution

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
  - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.
- On remarque quand x_2 augmente et x_4 reste nulle, on as:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
  - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.
- On remarque quand x_2 augmente et x_4 reste nulle, on as:
  - La deuxieme contrainte limite x_2 a 8.(x_1 s'annulle).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
  - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.
- On remarque quand x_2 augmente et x_4 reste nulle, on as:
  - La deuxieme contrainte limite x_2 a 8.(x_1 s'annulle).
  - Cepdenant dans la premiere contrainte, comment x_1 et x_2 vont changer?

Amelioration solution

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
  - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.
- On remarque quand x_2 augmente et x_4 reste nulle, on as:
  - La deuxieme contrainte limite x_2 a 8.(x_1 s'annulle).
  - Cepdenant dans la premiere contrainte, comment x_1 et x_2 vont changer?
- **Selon la deuxieme contrainte**, quand x_2 augmente par 1 et x_4 reste nul alors x_1 **decroit** par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{cccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
  - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.
- On remarque quand x_2 augmente et x_4 reste nulle, on as:
  - La deuxieme contrainte limite x_2 a 8.(x_1 s'annulle).
  - Cepdenant dans la premiere contrainte, comment x_1 et x_2 vont changer?
- **Selon la deuxieme contrainte**, quand x_2 augmente par 1 et x_4 reste nul alors x_1 **decroit** par $\frac{1}{2}$.
  - Ainsi Selon la **premiere contrainte**, quand x_2 augmente par 1 **et** x_1 diminue par $\frac{1}{2}$, x_3 doit decroitre par $\frac{3}{2}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
  - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.
- On remarque quand x_2 augmente et x_4 reste nulle, on as:
  - La deuxieme contrainte limite x_2 a $8.(x_1$ s'annulle$)$.
  - Cepdenant dans la premiere contrainte, comment x_1 et x_2 vont changer?
- **Selon la deuxieme contrainte**, quand x_2 augmente par 1 et x_4 reste nul alors x_1 **decroit** par $\frac{1}{2}$.
  - Ainsi Selon la **premiere contrainte**, quand x_2 augmente par 1 **et** x_1 diminue par $\frac{1}{2}$, x_3 doit decroitre par $\frac{3}{2}$.
  - Ainsi, x_2 peut augmenter a $\frac{4}{3}$.

Amelioration solution

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
  - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.
- On remarque quand x_2 augmente et x_4 reste nulle, on as:
  - La deuxieme contrainte limite x_2 a 8.(x_1 s'annulle).
  - Cepdenant dans la premiere contrainte, comment x_1 et x_2 vont changer?
- **Selon la deuxieme contrainte**, quand x_2 augmente par 1 et x_4 reste nul alors x_1 **decroit** par $\frac{1}{2}$.
  - Ainsi Selon la **premiere contrainte**, quand x_2 augmente par 1 **et** x_1 diminue par $\frac{1}{2}$, x_3 doit decroitre par $\frac{3}{2}$.
  - Ainsi, x_2 peut augmenter a $\frac{4}{3}$.
  - On atteint $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0)$.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- On veut ameliorer $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.
  - Que doit on choisir x_2 ou x_4. On prend x_2.
- On remarque quand x_2 augmente et x_4 reste nulle, on as:
  - La deuxieme contrainte limite x_2 a 8.(x_1 s'annulle).
  - Cepdenant dans la premiere contrainte, comment x_1 et x_2 vont changer?
- **Selon la deuxieme contrainte**, quand x_2 augmente par 1 et x_4 reste nul alors x_1 **decroit** par $\frac{1}{2}$.
  - Ainsi Selon la **premiere contrainte**, quand x_2 augmente par 1 **et** x_1 diminue par $\frac{1}{2}$, x_3 doit decroitre par $\frac{3}{2}$.
  - Ainsi, x_2 peut augmenter a $\frac{4}{3}$.
  - On atteint $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0)$.
- La valeur de $z = \frac{10}{3} \times 2 + \frac{4}{3} \times 3 = \frac{32}{2}$.

Remarque

Comment realiser ce type de calcul avec des **milliers** de variables et de contraintes!!!

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

Remarque

Comment realiser ce type de calcul avec des **milliers** de variables et de contraintes!!!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}$$

- Une **Methode plus simple** consiste a:

Remarque

Comment realiser ce type de calcul avec des **milliers** de variables et de contraintes!!!

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- Une **Methode plus simple** consiste a:
  - Restreindre chaque contrainte d'avoir **une seule** variabble de base.

Remarque

Comment realiser ce type de calcul avec des **milliers** de variables et de contraintes!!!

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- Une **Methode plus simple** consiste a:
  - Restreindre chaque contrainte d'avoir **une seule** variabble de base.
  - Limiter la contrainte 0 de **n'avoir** aucune variable de base.

Remarque

Comment realiser ce type de calcul avec des **milliers** de variables et de contraintes!!!

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- Une **Methode plus simple** consiste a:
  - Restreindre chaque contrainte d'avoir **une seule** variabble de base.
  - Limiter la contrainte 0 de **n'avoir** aucune variable de base.
- Avec un language **matriciel**:

Remarque

Comment realiser ce type de calcul avec des **milliers** de variables et de contraintes!!!

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

- Une **Methode plus simple** consiste a:
  - Restreindre chaque contrainte d'avoir **une seule** variabble de base.
  - Limiter la contrainte 0 de **n'avoir** aucune variable de base.
- Avec un language **matriciel**:
  - On cherche un **matrice identite** dans les contraintes.

Remarque

Comment realiser ce type de calcul avec des **milliers** de variables et de contraintes!!!

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8
\end{array}
$$

- Une **Methode plus simple** consiste a:
  - Restreindre chaque contrainte d'avoir **une seule** variabble de base.
  - Limiter la contrainte 0 de **n'avoir** aucune variable de base.
- Avec un language **matriciel**:
  - On cherche un **matrice identite** dans les contraintes.
  - On cherche un **vecteur null** dans la contrainte 0.

Deuxieme essai

- On rappelle le systeme initial:

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

On commence avec $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.

Deuxieme essai

- On rappelle le systeme initial:

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

On commence avec $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.

  - On remarque que pour les colonnes de base (troisieme et quatrieme) on as une matrice identite.

Deuxieme essai

- On rappelle le systeme initial:

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

  On commence avec $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.

  - On remarque que pour les colonnes de base (troisieme et quatrieme) on as une matrice identite.

- Maintenant on sait que x_1 entre et x_4 sort.

Deuxieme essai

- On rappelle le systeme initial:

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

  On commence avec $x^1 = (0, 0, 6, 8)$ et $z_1 = 0$.

  - On remarque que pour les colonnes de base (troisieme et quatrieme) on as une matrice identite.

- Maintenant on sait que x_1 entre et x_4 sort.
  - La base devient (x_1, x_3).

Deuxieme essai

- On rappelle le systeme initial:

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \end{array}$$

On commence avec $x^1 = (0,0,6,8)$ et $z_1 = 0$.

  - On remarque que pour les colonnes de base (troisieme et quatrieme) on as une matrice identite.

- Maintenant on sait que x_1 entre et x_4 sort.
  - La base devient (x_1, x_3).
  - On doit remetre le systeme sous la forme:

$$\begin{array}{cccccccccc} z & & + & ?x_2 & & & + & ?x_4 & = & 0 \\ & & + & ?x_2 & + & x_3 & + & ?x_4 & = & 6 \\ & x_1 & + & ?x_2 & & & + & ?x_4 & = & 8 \end{array}$$

Mise a jour du systeme

- On commence par:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 & (L0) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & & = & 6 & (L1) \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 8 & (L2)
\end{array}
\tag{2}
$$

Mise a jour du systeme

- On commence par:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 & (L0) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 & (L1) \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 & (L2)
\end{array} \qquad (2)
$$

1. On multiplie $L2$ par $\frac{1}{2}$, on obtient $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4$.

- On commence par:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 & (L0) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 & (L1) \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 & (L2)
\end{array} \tag{2}
$$

1. On multiplie $L2$ par $\frac{1}{2}$, on obtient $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4$.
2. On remplace $(L1)$ par $(L1) + (L2)$, on obtient $\frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2$

- On commence par:

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 & (L0) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 & (L1) \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 & (L2)
\end{array} \qquad (2)
$$

1. On multiplie L2 par $\frac{1}{2}$, on obtient $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4$.
2. On remplace $(L1)$ par $(L1) + (L2)$, on obtient $\frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2$
3. On multiplie $(L2)$ par 1 et l'ajoute a $(L0)$: $z - 2x_2 + x_4 = 8$.

- On commence par:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 & (L0) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 & (L1) \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 & (L2)
\end{array} \quad (2)
$$

1. On multiplie L2 par $\frac{1}{2}$, on obtient $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4$.
2. On remplace $(L1)$ par $(L1) + (L2)$, on obtient $\frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2$
3. On multiplie $(L2)$ par 1 et l'ajoute a $(L0)$: $z - 2x_2 + x_4 = 8$.

- On obtient alors le systeme:

$$
\begin{array}{lcl}
z - 2x_2 + x_4 & = & 8 \\
\frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 & = & 2 \\
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4 & &
\end{array} \quad (3)
$$

Mise a jour du systeme

- On commence par:

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & = & 0 & (L0) \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & x3 & & = & 6 & (L1) \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 8 & (L2) \end{array} \tag{2}$$

1. On multiplie L2 par $\frac{1}{2}$, on obtient $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4$.
2. On remplace $(L1)$ par $(L1) + (L2)$, on obtient $\frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2$
3. On multiplie $(L2)$ par 1 et l'ajoute a $(L0)$: $z - 2x_2 + x_4 = 8$.

- On obtient alors le systeme:

$$\begin{array}{lcl} z - 2x_2 + x_4 & = & 8 \\ \frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 & = & 2 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4 & & \end{array} \tag{3}$$

- Ceci nous as aussi donne la valeur de $z = 8$ et la solution actuelle $x^2 = (4, 0, 2, 0)$.

On peut simplifier la formulation du processus de la méthode de simplexe en utilisant les étapes suivantes:

1. Formuler le problème dans sa forme standard.

		$c_j \rightarrow$	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0
Basic Variables Coefficient ($\boldsymbol{c_B}$)	*Basic Variables* $\boldsymbol{B}$	*Basic Variables Value* $\boldsymbol{b}\ (= \boldsymbol{x_B})$	*Variables* x_1	x_2	...	x_n	s_1	s_2	...	s_m
c_{B1}	s_1	$x_{B1} = b_1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
c_{B2}	s_2	$x_{B2} = b_2$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
c_{Bm}	s_m	$x_{Bm} = b_m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1
$Z = \Sigma\, c_{Bi} x_{Bi}$		$z_j = \Sigma\, c_{Bi} x_j$	0	0	...	0	0	0	...	0
		$c_j - z_j$	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	...	$c_n - z_n$	0	0	...	0

On peut simplifier la formulation du processus de la méthode de simplexe en utilisant les étapes suivantes:

1. Formuler le problème dans sa forme standard.
2. Choisir une **solution initiale**

$$x_B = B^{-1}b$$

		$c_j \rightarrow$	c_1	c_2	$\dots$	c_n	0	0	$\dots$	0
Basic Variables Coefficient (c_B)	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* b ($= x_B$)	*Variables* x_1	x_2	$\dots$	x_n	s_1	s_2	$\dots$	s_m
c_{B1}	s_1	$x_{B1} = b_1$	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0
c_{B2}	s_2	$x_{B2} = b_2$	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
c_{Bm}	s_m	$x_{Bm} = b_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1
$Z = \Sigma c_{Bi} x_{Bi}$		$z_j = \Sigma c_{Bi} x_j$	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
		$c_j - z_j$	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	$\dots$	$c_n - z_n$	0	0	$\dots$	0

- La colonne c_B stocke les coefficients des variables de bases.

		$c_j \rightarrow$	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	0	0	$\ldots$	0
Basic Variables Coefficient (c_B)	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b\ (= x_B)$	*Variables* x_1	x_2	$\ldots$	x_n	s_1	s_2	$\ldots$	s_m
c_{B1}	s_1	$x_{B1} = b_1$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0
c_{B2}	s_2	$x_{B2} = b_2$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0
.	.	.	.	.		.	.	.		.
.	.	.	.	.		.	.	.		.
.	.	.	.	.		.	.	.		.
c_{Bm}	s_m	$x_{Bm} = b_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	1
$Z = \Sigma\, c_{Bi} x_{Bi}$		$z_j = \Sigma\, c_{Bi} x_j$	0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
		$c_j - z_j$	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	$\ldots$	$c_n - z_n$	0	0	$\ldots$	0

Explication du tableau

- La colonne c_B stocke les coefficients des variables de bases.
- La colonne B contient une liste de variables qui sont dans la base.

		$c_j \rightarrow$	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0
Basic Variables Coefficient ($\boldsymbol{c_B}$)	*Basic Variables* $\boldsymbol{B}$	*Basic Variables Value* $\boldsymbol{b}$ (= $\boldsymbol{x_B}$)	*Variables*							
			x_1	x_2	...	x_n	s_1	s_2	...	s_m
c_{B1}	s_1	$x_{B1} = b_1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
c_{B2}	s_2	$x_{B2} = b_2$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
.	.	.	.	.		.	.	.		.
.	.	.	.	.		.	.	.		.
.	.	.	.	.		.	.	.		.
c_{Bm}	s_m	$x_{Bm} = b_m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1
$Z = \Sigma c_{Bi} x_{Bi}$		$z_j = \Sigma c_{Bi} x_j$	0	0	...	0	0	0	...	0
		$c_j - z_j$	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	...	$c_n - z_n$	0	0	...	0

Explication du tableau

- La colonne c_B stocke les coefficients des variables de bases.
- La colonne B contient une liste de variables qui sont dans la base.
- La colonne x_b stocke la valeur actuelle de la **solution de base**.

		$c_j \rightarrow$	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	0	0	$\ldots$	0
Basic Variables Coefficient ($\boldsymbol{c_B}$)	*Basic Variables* $\boldsymbol{B}$	*Basic Variables Value* $\boldsymbol{b}\ (= \boldsymbol{x_B})$	*Variables* x_1	x_2	$\ldots$	x_n	s_1	s_2	$\ldots$	s_m
c_{B1}	s_1	$x_{B1} = b_1$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0
c_{B2}	s_2	$x_{B2} = b_2$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
c_{Bm}	s_m	$x_{Bm} = b_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	1
$Z = \Sigma\, c_{Bi} x_{Bi}$		$z_j = \Sigma\, c_{Bi} x_j$	0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
		$c_j - z_j$	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	$\ldots$	$c_n - z_n$	0	0	$\ldots$	0

Explication du tableau

- La colonne c_B stocke les coefficients des variables de bases.
- La colonne B contient une liste de variables qui sont dans la base.
- La colonne x_b stocke la valeur actuelle de la **solution de base**.
- Les coefficients a_{ij} représentent les **taux de changements**.

		$c_j \rightarrow$	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0
Basic Variables Coefficient (c_B)	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* b $(= x_B)$	*Variables* x_1	x_2	...	x_n	s_1	s_2	...	s_m
c_{B1}	s_1	$x_{B1} = b_1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
c_{B2}	s_2	$x_{B2} = b_2$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
.	.	.	.	.		.	.	.		.
.	.	.	.	.		.	.	.		.
.	.	.	.	.		.	.	.		.
c_{Bm}	s_m	$x_{Bm} = b_m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1
$Z = \Sigma c_{Bi} x_{Bi}$		$z_j = \Sigma c_{Bi} x_j$	0	0	...	0	0	0	...	0
		$c_j - z_j$	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	...	$c_n - z_n$	0	0	...	0

Explication du tableau

- La colonne c_B stocke les coefficients des variables de bases.
- La colonne B contient une liste de variables qui sont dans la base.
- La colonne x_b stocke la valeur actuelle de la **solution de base**.
- Les coefficients a_{ij} représentent les **taux de changements**.
- Les valeurs z_j représentent les gain sur la fonction objective fonction si la variables x_j entre dans la base.

$$z_j = \sum c_{Bi} x_j$$

		$c_j \rightarrow$	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0
Basic Variables Coefficient (c_B)	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b\ (= x_B)$	*Variables*							
			x_1	x_2	...	x_n	s_1	s_2	...	s_m
c_{B1}	s_1	$x_{B1} = b_1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
c_{B2}	s_2	$x_{B2} = b_2$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
.	.	.	.	.		.	.	.		.
.	.	.	.	.		.	.	.		.
.	.	.	.	.		.	.	.		.
c_{Bm}	s_m	$x_{Bm} = b_m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1
$Z = \Sigma c_{Bi} x_{Bi}$		$z_j = \Sigma c_{Bi} x_j$	0	0	...	0	0	0	...	0
		$c_j - z_j$	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	...	$c_n - z_n$	0	0	...	0

Exemple

- Pour mieux comprendre ce tableau, on va considérer le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{max} & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t} & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ & 2x_2 + 5x_3 \leqslant 10 \\ & 3x1 + 2x_2 + 4x_4 \leqslant 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exemple

- Pour mieux comprendre ce tableau, on va considérer le problème suivant:

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t} & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ & 2x_2 + 5x_3 \leqslant 10 \\ & 3x1 + 2x_2 + 4x_4 \leqslant 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

		$c_j \rightarrow$	*3*	*5*	*4*	*0*	*0*	*0*
Basic Variables Coefficient $\boldsymbol{c_B}$	*Basic Variables* $\boldsymbol{B}$	*Basic Variables Value* $\boldsymbol{b} (= \boldsymbol{x_B})$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	8	2	3	0	1	0	0
0	s_2	10	0	2	5	0	1	0
0	s_3	15	3	2	4	0	0	1
$Z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0
		$c_j - z_j$	3	5	4	0	0	0

3. **Test d'optimalite** On calcule l'expression

$$c_j - z_j = c_j - \sum_i c_{Bi} x_j$$

3. **Test d'optimalite** On calcule l'expression

$$c_j - z_j = c_j - \sum_i c_{Bi} x_j$$

Optimalité

3. **Test d'optimalite** On calcule l'expression

$$c_j - z_j = c_j - \sum_i c_{Bi} x_j$$

Optimalité

1. Si **tous** les $c_j - z_j \leqslant 0$, alors la solution obtenue est **optimale**.

3. **Test d'optimalite** On calcule l'expression

$$c_j - z_j = c_j - \sum_i c_{Bi} x_j$$

Optimalité

1. Si **tous** les $c_j - z_j \leqslant 0$, alors la solution obtenue est **optimale**.
2. Si on trouve une colonne $c_j - z_j > 0$ tel que tous les coefficients $a_{ik} < 0$. Alors le problème est **non borné**.

3. **Test d'optimalite** On calcule l'expression

$$c_j - z_j = c_j - \sum_i c_{Bi} x_j$$

Optimalité

1. Si **tous** les $c_j - z_j \leqslant 0$, alors la solution obtenue est **optimale**.
2. Si on trouve une colonne $c_j - z_j > 0$ tel que tous les coefficients $a_{ik} < 0$. Alors le problème est **non borné**.
3. Finalement, si pour une colonne $c_j - z_j > 0$ et qui contient un coefficient positive $(a_{ik} > 0$. Alors la solution peut être **ameliore****e**.

4. Pour décider la variable **entrante**, on choisit simpelement celle avec le plus **grande** participation:

$$c_k - z_k = \max\left\{(c_j - z_j) \,|; c_j - z_j > 0\right\}.$$

4. Pour décider la variable **entrante**, on choisit simpelement celle avec le plus **grande** participation:

$$c_k - z_k = \max\left\{(c_j - z_j)\,|;\, c_j - z_j > 0\right\}.$$

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	8	2	3	0	1	0	0
0	s_2	10	0	2	5	0	1	0
0	s_3	15	3	2	4	0	0	1
$Z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0
		$c_j - z_j$	3	5	4	0	0	0
				$\uparrow$				

- Cette colonne est appelle **colonne pivot**.

5. **Variable sortante**:

5. **Variable sortante**:

Variable sortante

Pour déterminer la variable sortante, on divise chaque élément b_i par le coefficient **non nul** de la colonne **pivot**.

$$\frac{x_{Br}}{a_{rj}} = \min\left\{\frac{x_{Bi}}{a_{rj}} \mid a_{rj} > 0\right\}$$

Ce rapport est appelé **rapport d'échange**.
La ligne de cette variable est appelle **ligne pivot**.

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0	
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b\,(= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	*Min Ratio* x_B/x_2
0	s_1	8	2	3	0	1	0	0	8/3 $\rightarrow$
0	s_2	10	0	2	5	0	1	0	10/2
0	s_3	15	3	2	4	0	0	1	15/2
$Z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	3	5	4	0	0	0	
				$\uparrow$					

La dernière étape consiste **adapter** les coefficients du pivot.

1. Dans la ligne pivot, le coefficient du pivot doit être **0**.

Ceci peut être réalise par la méthode de **substitution de Gauss**.

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0	
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	*Min Ratio* x_B/x_2
0	s_1	8	2	3	0	1	0	0	8/3 $\rightarrow$
0	s_2	10	0	2	5	0	1	0	10/2
0	s_3	15	3	2	4	0	0	1	15/2
$Z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	3	5 $\uparrow$	4	0	0	0	

La dernière étape consiste **adapter** les coefficients du pivot.

1. Dans la ligne pivot, le coefficient du pivot doit être **0**.
2. Dans les autres lignes, le coefficient doit être **null**.

Ceci peut être réalise par la méthode de **substitution de Gauss**.

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0	
Basic Variables Coefficient c_B	Basic Variables B	Basic Variables Value $b (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Min Ratio x_B/x_2
0	s_1	8	2	3	0	1	0	0	8/3 $\rightarrow$
0	s_2	10	0	2	5	0	1	0	10/2
0	s_3	15	3	2	4	0	0	1	15/2
$Z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	3	5	4	0	0	0	
				$\uparrow$					

La dernière étape consiste **adapter** les coefficients du pivot.

1. Dans la ligne pivot, le coefficient du pivot doit être $\mathbf{0}$.
2. Dans les autres lignes, le coefficient doit être **null**.

Ceci peut être réalise par la méthode de **substitution de Gauss**.

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0	
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	*Min Ratio* x_B/x_2
0	s_1	8	2	3	0	1	0	0	8/3 $\rightarrow$
0	s_2	10	0	2	5	0	1	0	10/2
0	s_3	15	3	2	4	0	0	1	15/2
$Z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	3	5 $\uparrow$	4	0	0	0	

1. $R_1 = \frac{R_1}{3}$

Meilleure solution

La dernière étape consiste **adapter** les coefficients du pivot.

1. Dans la ligne pivot, le coefficient du pivot doit être $\mathbf{0}$.
2. Dans les autres lignes, le coefficient doit être **null**.

Ceci peut être réalise par la méthode de **substitution de Gauss**.

		$c_j \rightarrow$	*3*	*5*	*4*	*0*	*0*	*0*	
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	*Min Ratio* x_B/x_2
0	s_1	8	2	3	0	1	0	0	8/3 $\rightarrow$
0	s_2	10	0	2	5	0	1	0	10/2
0	s_3	15	3	2	4	0	0	1	15/2
$Z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	3	5	4	0	0	0	
				$\uparrow$					

1. $R_1 = \frac{R_1}{3}$
2. $R_2 = R_2 - 2R_1$

La dernière étape consiste **adapter** les coefficients du pivot.

1. Dans la ligne pivot, le coefficient du pivot doit être **0**.
2. Dans les autres lignes, le coefficient doit être **null**.

Ceci peut être réalise par la méthode de **substitution de Gauss**.

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0	
Basic Variables Coefficient c_B	Basic Variables B	Basic Variables Value $b (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Min Ratio x_B/x_2
0	s_1	8	2	3	0	1	0	0	8/3 $\rightarrow$
0	s_2	10	0	2	5	0	1	0	10/2
0	s_3	15	3	2	4	0	0	1	15/2
$Z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - z_j$	3	5 $\uparrow$	4	0	0	0	

1. $R_1 = \frac{R_1}{3}$
2. $R_2 = R_2 - 2R_1$
3. $R_3 = R_3 - 2R_1$

Nouvelle solution

Question

Calculer le résultat de ce changement, puis repreniez les **étapes précédentes** pour la nouvelle solution.

Question

Calculer le résultat de ce changement, puis repreniez les **étapes précédentes** pour la nouvelle solution.

Question

Calculer le résultat de ce changement, puis repreniez les **étapes précédentes** pour la nouvelle solution.

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0	
Basics Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* b $(= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	*Min Ratio* x_B/x_3
5	x_2	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0	–
0	s_2	14/3	– 4/3	0	5	– 2/3	1	0	(14/3)/5 $\rightarrow$
0	s_3	29/3	5/3	0	4	– 2/3	0	1	(29/3)/4
$Z = 40/3$		z_j	10/3	5	0	5/3	0	0	
		$c_j - z_j$	– 1/3	0	4	– 5/3	0	0	
					$\uparrow$				

Figure: Iteration 1 du simplexe

Deux dernières itérations

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0	
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b\ (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	*Min Ratio* x_B/x_1
5	x_2	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0	(8/3)/(2/3) = 4
4	x_3	14/15	– 4/15	0	1	– 2/15	1/5	0	–
0	s_3	89/15	41/15	0	0	2/15	– 4/5	1	(89/15)/(41/15) = 2.17 →
$Z = 256/15$		z_j	34/15	5	4	17/15	4/5	0	
		$c_j - z_j$	11/15 ↑	0	0	– 17/15	– 4/5	0	

Figure: Iteration 2 du simplexe

Deux dernières itérations

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0	
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b\ (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	*Min Ratio* x_B/x_1
5	x_2	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0	(8/3)/(2/3) = 4
4	x_3	14/15	– 4/15	0	1	– 2/15	1/5	0	–
0	s_3	89/15	41/15	0	0	2/15	– 4/5	1	(89/15)/(41/15) = 2.17 $\rightarrow$
Z = 256/15		z_j	34/15	5	4	17/15	4/5	0	
		$c_j - z_j$	11/15 $\uparrow$	0	0	– 17/15	– 4/5	0	

Figure: Iteration 2 du simplexe

		$c_j \rightarrow$	3	5	4	0	0	0
Basic Variables Coefficient c_B	*Basic Variables* B	*Basic Variables Value* $b\ (= x_B)$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
5	x_2	50/41	0	1	0	15/41	8/41	– 10/41
4	x_3	62/41	0	0	1	– 6/41	5/41	4/41
3	x_1	89/41	1	0	0	– 2/41	– 12/41	15/41
Z = 765/41		z_j	3	5	4	45/41	24/41	11/41
		$c_j - z_j$	0	0	0	– 45/41	– 24/41	– 11/41

Figure: Iteration 3 du simplexe (finale)