Programmation Linéaire

A.Belcaid

ENSA-Safi

May 18, 2022

- Ce chapitre est réservé a l'étude des Programme linéaire (LP).
  - Ils sont **omniprésents** en pratique.
  - Ils possedent des propriétés mathématiques tres utiles.
  - Constituent un excellent début pour la RO.
- Nous allons etudier:
  - Quels types de problèmes peuvent être formulés comme un LP.
  - Comment formuler un LP dans sa forme **compacte**.

Table de matière

1. Terminologie
2. Méthode graphique.

- La **Programmation linéaire** est le processus de **formuler** et de **résoudre** un Programme linéaire (LP).

- La **Programmation linéaire** est le processus de **formuler** et de **résoudre** un Programme linéaire (LP).
- Un LP est un **programme mathématique** avec des propriétés bien definies.

- La **Programmation linéaire** est le processus de **formuler** et de **résoudre** un Programme linéaire (LP).
- Un LP est un **programme mathématique** avec des propriétés bien definies.
- Avant on va introduire certains **concepts** d'un programme mathematique.

- La forme générale d'un programme mathématique est:

$$
\begin{array}{llll}
\min & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & & \text{(fonction objective)} \\
\text{s.t.} & g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b_i & \forall i = 1, \ldots, m & \text{(contraintes)} \\
& x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, \ldots, n & \text{(variables decision)}
\end{array}
$$

Elements basiques d'un programme lineaire

- La forme générale d'un programme mathématique est:

$$
\begin{array}{llll}
\text{min} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) & & \text{(fonction objective)} \\
\text{s.t.} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant b_i & \forall i = 1, \dots, m & \text{(contraintes)} \\
 & x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, \dots, n & \text{(variables decision)}
\end{array}
$$

  - On possèdent m contraintes et n variables.

- La forme générale d'un programme mathématique est:

$$\begin{array}{llll} \text{min} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) & & (\text{fonction objective}) \\ \text{s.t.} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant b_i & \forall i = 1, \dots, m & (\text{contraintes}) \\ & x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, \dots, n & (\text{variables decision}) \end{array}$$

  - On possèdent m contraintes et n variables.
  - $x_1, \dots, x_n$ sont tous des **réels**.

- La forme générale d'un programme mathématique est:

$$\begin{array}{llll} \min & f(x_1, x_2, \dots, x_n) & & \text{(fonction objective)} \\ \text{s.t.} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant b_i & \forall i = 1, \dots, m & \text{(contraintes)} \\ & x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, \dots, n & \text{(variables decision)} \end{array}$$

  - On possèdent m contraintes et n variables.
  - $x_1, \dots, x_n$ sont tous des **réels**.
  - On peut écrire:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

  est le **vecteur de décision**

- La forme générale d'un programme mathématique est:

$$
\begin{array}{llll}
\min & f(x_1, x_2, \dots, x_n) & & \text{(fonction objective)} \\
\text{s.t.} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant b_i & \forall i = 1, \dots, m & \text{(contraintes)} \\
 & x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, \dots, n & \text{(variables decision)}
\end{array}
$$

  - On possèdent m contraintes et n variables.
  - $x_1, \dots, x_n$ sont tous des **réels**.
  - On peut écrire:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

    est le **vecteur de décision**

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: des fonctions réelles.

- Et si on veut **maximiser?**

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \; -f(x)$$

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \ -f(x)$$

Transformation

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \; -f(x)$$
- qu'en est-il des autres contraintes?

Transformation

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \; -f(x)$$
- qu'en est-il des autres contraintes?
  - $g_i(x) \geqslant b_i \iff -g_i(x) \leqslant -b_i$

Transformation

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \; -f(x)$$
- qu'en est-il des autres contraintes?
  - $g_i(x) \geqslant b_i \iff -g_i(x) \leqslant -b_i$
  - $g_i(x) = b_i \iff g_i(x) \leqslant b_i$ et $g_i(x) \geqslant b_i$

Transformation

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \; -f(x)$$
- qu'en est-il des autres contraintes?
  - $g_i(x) \geqslant b_i \iff -g_i(x) \leqslant -b_i$
  - $g_i(x) = b_i \iff g_i(x) \leqslant b_i$ et $g_i(x) \geqslant b_i$

Transformation

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \; -f(x)$$
- qu'en est-il des autres contraintes?
  - $g_i(x) \geqslant b_i \iff -g_i(x) \leqslant -b_i$
  - $g_i(x) = b_i \iff g_i(x) \leqslant b_i$ et $g_i(x) \geqslant b_i$
- Par exemple:

$$\begin{array}{lllll} \max & x1 - x2 & & & \\ \text{s.t} & -2x_1 + x_2 & \geqslant & -3 & \iff \\ & x_1 + 4x_2 & = & 5 & \end{array}$$

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \; -f(x)$$
- qu'en est-il des autres contraintes?
  - $g_i(x) \geqslant b_i \iff -g_i(x) \leqslant -b_i$
  - $g_i(x) = b_i \iff g_i(x) \leqslant b_i$ et $g_i(x) \geqslant b_i$
- Par exemple:

$$\begin{array}{lccc} \max & x1 - x2 & & \\ \text{s.t} & -2x_1 + x_2 & \geqslant & -3 \\ & x_1 + 4x_2 & = & 5 \end{array} \iff$$

- Et si on veut **maximiser?**
  - $$\max f(x) \iff \min \; -f(x)$$
- qu'en est-il des autres contraintes?
  - $g_i(x) \geqslant b_i \iff -g_i(x) \leqslant -b_i$
  - $g_i(x) = b_i \iff g_i(x) \leqslant b_i$ et $g_i(x) \geqslant b_i$
- Par exemple:

$$\begin{array}{lccc} \max & x1 - x2 & & \\ \text{s.t} & -2x_1 + x_2 & \geqslant & -3 \\ & x_1 + 4x_2 & = & 5 \end{array} \iff \begin{array}{lccc} \max & x1 - x2 & & \\ \text{s.t} & 2x_1 - x_2 & \leqslant & 3 \\ & x_1 + 4x_2 & \leqslant & 5 \\ & -x_1 - 4x_2 & \leqslant & -5 \end{array}$$

- On va distinguer selon deux types de **Contraintes**.
  - **Contraintes de signe** comme $x_i \geqslant 0$ ou $x_i \leqslant 0$.
  - **Contraintes** : les autres.
- Pour une variable x_i:
  - Elle est **positive** si $x_i \geqslant 0$.
  - Elle est **négative** si $x_i \leqslant 0$.
  - Elle est **sans contrainte** sinon.

Solution faisables

- Pour un programme mathématique:

Solution faisables

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.

Solution faisables

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.
  - Dans le cas contraire, elle est dite **non realisable.**

Solution faisables

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.
  - Dans le cas contraire, elle est dite **non realisable.**

Solution faisables

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.
  - Dans le cas contraire, elle est dite **non realisable.**

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

Solution faisables

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.
  - Dans le cas contraire, elle est dite **non realisable.**

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.
  - Dans le cas contraire, elle est dite **non realisable.**

$$\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}$$

- Réalisable?

Solution faisables

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.
  - Dans le cas contraire, elle est dite **non realisable.**

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

- Réalisable?
  - $x^1 = (2, 3)$

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.
  - Dans le cas contraire, elle est dite **non realisable.**

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

- Réalisable?
  - $x^1 = (2, 3)$
  - $x^2 = (6, 0)$

- Pour un programme mathématique:
  - On dit qu'une solution est **réalisable** si elle satisfait **toutes** les contraintes.
  - Dans le cas contraire, elle est dite **non realisable.**

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
& x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
& x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
& x_1 & \geqslant & 0 \\
& x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

- Réalisable?
  - $x^1 = (2, 3)$
  - $x^2 = (6, 0)$
  - $x^3 = (6, 6)$

Région réalisable et solution optimale

- on appelle **Région réalisable** l'ensemble de toutes les solutions réalisable.
  - Cette région peut être vide!
- Une **Solution optimale** est une solution qui:
  - Atteint la valeur maximale pour le problème mathématique.
  - Plus simplement, on peut pas trouver de meilleure solution.
- Une solution optimale **n'est pas forcement unique**.
  - On peut avoir **plusieurs** solution optimales.
  - Comme on peut avoir **aucune** solution optimale.

- Pour une solution, on dit qu'une contraintes est **saturée**[1] :

[1] on peut aussi trouver le vocabulaire **active/non active**

Contraintes Saturée

- Pour une solution, on dit qu'une contraintes est **saturée**[1] :

Définition

Soit $g(.) \leqslant b$ une contrainte et $\overline{x}$ une solution.
La contrainte $g(.) \leqslant b$ est **saturée** si $g(\overline{x}) = b$.

[1] on peut aussi trouver le vocabulaire **active/non active**

Contraintes Saturée

- Pour une solution, on dit qu'une contraintes est **saturée**[1] :

Définition

Soit $g(.) \leqslant b$ une contrainte et $\overline{x}$ une solution.
La contrainte $g(.) \leqslant b$ est **saturée** si $g(\overline{x}) = b$.

- Une inégalité est dite **non saturée** si elle est stricte dans ce point.

[1] on peut aussi trouver le vocabulaire **active/non active**

- Pour une solution, on dit qu'une contraintes est **saturée**[1] :

Définition

Soit $g(.) \leqslant b$ une contrainte et $\overline{x}$ une solution.
La contrainte $g(.) \leqslant b$ est **saturée** si $g(\overline{x}) = b$.

- Une inégalité est dite **non saturée** si elle est stricte dans ce point.
- Une contrainte d'égalité est toujours **saturée** dans une solution.

[1] on peut aussi trouver le vocabulaire **active/non active**

- Pour une solution, on dit qu'une contraintes est **saturée**[1] :

Définition

Soit $g(.) \leqslant b$ une contrainte et $\overline{x}$ une solution.
La contrainte $g(.) \leqslant b$ est **saturée** si $g(\overline{x}) = b$.

  - Une inégalité est dite **non saturée** si elle est stricte dans ce point.
  - Une contrainte d'égalité est toujours **saturée** dans une solution.

- Voici quelque exemples:

[1] on peut aussi trouver le vocabulaire **active/non active**

Contraintes Saturée

- Pour une solution, on dit qu'une contraintes est **saturée**[1] :

Définition

Soit $g(.) \leqslant b$ une contrainte et $\overline{x}$ une solution.
La contrainte $g(.) \leqslant b$ est **saturée** si $g(\overline{x}) = b$.

  - Une inégalité est dite **non saturée** si elle est stricte dans ce point.
  - Une contrainte d'égalité est toujours **saturée** dans une solution.

- Voici quelque exemples:
  - $x_1 + x_2 \leqslant 10$ est **saturée** dans $(x_1, x_2) = (2, 8)$.

[1]on peut aussi trouver le vocabulaire **active/non active**

- Pour une solution, on dit qu'une contraintes est **saturée**[1] :

Définition

Soit $g(.) \leqslant b$ une contrainte et $\bar{x}$ une solution.
La contrainte $g(.) \leqslant b$ est **saturée** si $g(\bar{x}) = b$.

  - Une inégalité est dite **non saturée** si elle est stricte dans ce point.
  - Une contrainte d'égalité est toujours **saturée** dans une solution.

- Voici quelque exemples:
  - $x_1 + x_2 \leqslant 10$ est **saturée** dans $(x_1, x_2) = (2, 8)$.
  - $2x_1 + x_2 \geqslant 6$ n'est **saturée** dans $(x_1, x_2) = (2, 8)$.

[1] on peut aussi trouver le vocabulaire **active/non active**

Contraintes Saturée

- Pour une solution, on dit qu'une contraintes est **saturée**[1] :

Définition

Soit $g(.) \leqslant b$ une contrainte et $\overline{x}$ une solution.
La contrainte $g(.) \leqslant b$ est **saturée** si $g(\overline{x}) = b$.

  - Une inégalité est dite **non saturée** si elle est stricte dans ce point.
  - Une contrainte d'égalité est toujours **saturée** dans une solution.

- Voici quelque exemples:
  - $x_1 + x_2 \leqslant 10$ est **saturée** dans $(x_1, x_2) = (2, 8)$.
  - $2x_1 + x_2 \geqslant 6$ n'est **saturée** dans $(x_1, x_2) = (2, 8)$.
  - $x_1 + 3x_2 = 9$ est **saturée** dans $(x_1, x_2) = (6, 1)$.

[1] on peut aussi trouver le vocabulaire **active/non active**

Contrainte strictes

- Une inegalite peut etre **stricte** ou **faible**:

- Une inegalite peut etre **stricte** ou **faible**:
  - Elle est stricte si les deux membres ne peuvent pas être gaux $x + +x2 > 5$.

Contrainte strictes

- Une inegalite peut etre **stricte** ou **faible**:
  - Elle est stricte si les deux membres ne peuvent pas être gaux $x + +x2 > 5$.
  - Elle est dite **faible**, si on peut avoir l'égalité. $x_1 + x_2 \geqslant 4$.

Contrainte strictes

- Une inegalite peut etre **stricte** ou **faible**:
  - Elle est stricte si les deux membres ne peuvent pas être gaux $x + +x2 > 5$.
  - Elle est dite **faible**, si on peut avoir l'égalité. $x_1 + x_2 \geqslant 4$.
- En pratique, dans un programme linéaire, toutes les inégalités sont **faible**.

- Une inegalite peut etre **stricte** ou **faible**:
  - Elle est stricte si les deux membres ne peuvent pas être gaux $x + +x2 > 5$.
  - Elle est dite **faible**, si on peut avoir l'égalité. $x_1 + x_2 \geqslant 4$.
- En pratique, dans un programme linéaire, toutes les inégalités sont **faible**.
  - Avec des contraintes strictes, il se peut qu'on atteint pas la solution.

- Une inegalite peut etre **stricte** ou **faible**:
  - Elle est stricte si les deux membres ne peuvent pas être gaux $x + +x2 > 5$.
  - Elle est dite **faible**, si on peut avoir l'égalité. $x_1 + x_2 \geqslant 4$.

- En pratique, dans un programme linéaire, toutes les inégalités sont **faible**.
  - Avec des contraintes strictes, il se peut qu'on atteint pas la solution.
  - Penser a l'exemple:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & x \\ \text{s.t.} & x > 0? \end{array}$$

Programme Linéaire

- Un programme mathématique:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leqslant b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{array}$$

est un LP si f et tous les g sont **lineaires**.

- Un programme mathématique:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leqslant b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{array}$$

est un LP si f et tous les g sont **lineaires**.

- Chacune des ces fondions peuvent être exprimées comme:

$$a_1 x_2 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=j}^{n} a_j x_j$$

ou $a_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ sont des **coefficients**.

- Un programme mathématique:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leqslant b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \end{array}$$

  est un LP si f et tous les g sont **lineaires**.

- Chacune des ces fondions peuvent être exprimées comme:

$$a_1 x_2 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \sum_{i=j}^{n} a_j x_j$$

  ou $a_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$ sont des **coefficients**.

- On peut aussi écrire $a = (a_1, \dots, a_n)$ et

$$f(x) = a^T x$$

.

Programme Linéaire

- Un programme mathématique:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leqslant b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{array}$$

  est un LP si f et tous les g sont **lineaires**.
- Chacune des ces fondions peuvent être exprimées comme:

$$a_1 x_2 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=j}^{n} a_j x_j$$

  ou $a_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ sont des **coefficients**.
- On peut aussi écrire $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et

$$f(x) = a^T x$$

.

- Un programme mathématique:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leqslant b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \end{array}$$

  est un LP si f et tous les g sont **lineaires**.
- Chacune des ces fondions peuvent être exprimées comme:

$$a_1 x_2 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=j}^{n} a_j x_j$$

  ou $a_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ sont des **coefficients**.
- On peut aussi écrire $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et

$$f(x) = a^T x$$

  .

- Un exemple:

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 + x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 6 \\ & 2x_1 + x_2 & \leqslant & 6 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 & \geqslant & 0. \end{array}$$

- En général, un LP peut être exprime par:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in 1, \dots, m \end{array}$$

Programme Linéaire

- En général, un LP peut être exprime par:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in 1, \ldots, m \end{array}$$

- A_{ij}: **les Coefficients des contraintes**.

Programme Linéaire

- En général, un LP peut être exprime par:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

- A_{ij}: **les Coefficients des contraintes**.
- b_j : Les valeurs du deuxième membre (RHS).

Programme Linéaire

- En général, un LP peut être exprime par:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in 1, \ldots, m \end{array}$$

- A_{ij}: **les Coefficients des contraintes**.
- b_j : Les valeurs du deuxième membre (RHS).
- c_j : les **Coefficient de la fonction objective**.

- En général, un LP peut être exprime par:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in 1, \ldots, m \end{array}$$

- A_{ij}: **les Coefficients des contraintes**.
- b_j : Les valeurs du deuxième membre (RHS).
- c_j : les **Coefficient de la fonction objective**.

- En général, un LP peut être exprime par:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- A_{ij}: **les Coefficients des contraintes**.
- b_j : Les valeurs du deuxième membre (RHS).
- c_j : les **Coefficient de la fonction objective**.

- Ou par une forme **vectorielle**:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leqslant b \end{aligned}$$

- En général, un LP peut être exprime par:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in 1, \dots, m \end{aligned}$$

- A_{ij}: **les Coefficients des contraintes**.
- b_j : Les valeurs du deuxième membre (RHS).
- c_j : les **Coefficient de la fonction objective**.

- Ou par une forme **vectorielle**:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leqslant b \end{aligned}$$

  - $A \in \mathbb{M}_{m,n}$

- En général, un LP peut être exprime par:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in 1, \dots, m \end{aligned}$$

- A_{ij}: **les Coefficients des contraintes**.
- b_j : Les valeurs du deuxième membre (RHS).
- c_j : les **Coefficient de la fonction objective**.

- Ou par une forme **vectorielle**:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leqslant b \end{aligned}$$

  - $A \in \mathbb{M}_{m,n}$
  - $c, x, b \in \mathbb{R}^n$.

- Pour un LP avec juste **deux variables de décision**, on peut les résoudre par la méthode **Graphique**.

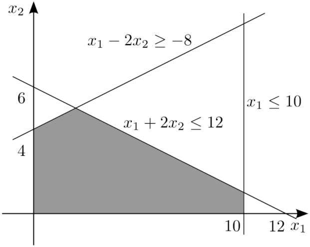
Methode graphique

- Pour un LP avec juste **deux variables de décision**, on peut les résoudre par la méthode **Graphique**.
  - On considère l'exemple suivant:

$$
\begin{array}{llll}
\max & 2x_1 + x2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

- **Etape 1** : Tracer la région réalisable.
  - Tracer la droite de chaque contrainte:

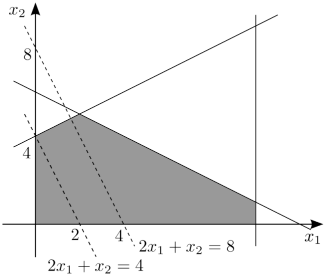
$$\begin{array}{llll} \max & 2x_1 + x2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\ & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\ & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\ & x_1 & \geqslant & 0 \\ & x_2 & \geqslant & 0 \end{array}$$



Etape 2

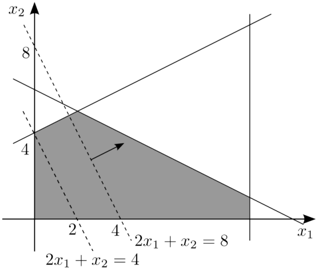
- Tracer les lignes **isolignes**:
  - Une ligne tel que tous les points possèdent la même fonction objective.
  - En économie, on les appelles de **lignes d'indifférence**.

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 2x_1 + x2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$



- Trouver la direction pour **pousser** les isolignes. :
  - Direction qui augmente/diminue la fonction objective selon la nature de problème d'optimisation.

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 2x_1 + x2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leqslant & 12 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geqslant & -8 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$



- Etape 4: Pousser l'isoligne jusqu'a la **fin de la région réalisable**.

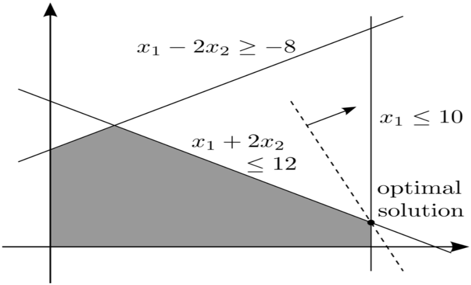


Figure: Pousser les droite pour jusque on peut plus avancer!

- Etape 5: Identifier les contraintes **saturees**(binding).

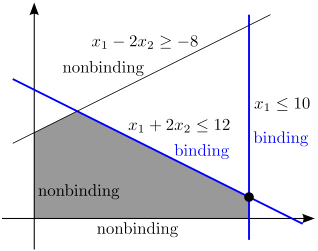


Figure: Identifier les contraintes saturées.

Etape 6

- Résoudre le système des deux équations saturées.

Etape 6

- Résoudre le système des deux équations saturées.
  - Dans l'exemple précédant, les contraintes sont:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \end{array}$$

- Résoudre le système des deux équations saturées.
  - Dans l'exemple précédant, les contraintes sont:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \end{array}$$

  - Resoudre le systeme

$$(x_1^*, x_2^*) = (10, 1)$$

Formulation compacte

- La plupart des problèmes en pratique sont de **large echelle.**