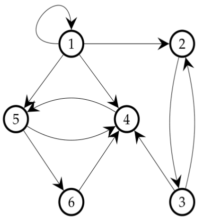
Graphes Orientés

A.Belcaid

ENSA-Safi

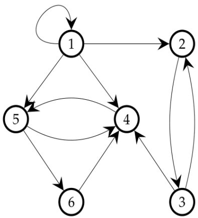
March 1, 2022

- Un graphe **orienté** traduit des relations **asymétriques** entre des entités.



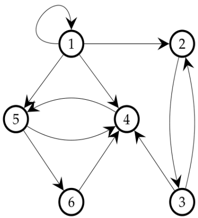
Graphe Orienté

- Un graphe **orienté** traduit des relations **asymétriques** entre des entités.
- Un graphe orienté $G = (V, E)$ est définit par des sommets V et des relations $E = V \times V$.



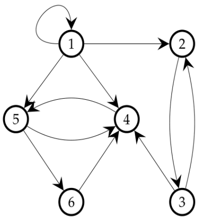
Graphe Orienté

- Un graphe **orienté** traduit des relations **asymétriques** entre des entités.
- Un graphe orienté $G = (V, E)$ est définit par des sommets V et des relations $E = V \times V$.
- Pour deux sommets (x, y) adjacents, le lien (x, y) est appelé **arc** de x vers y.



Graphe Orienté

- Un graphe **orienté** traduit des relations **asymétriques** entre des entités.
- Un graphe orienté $G = (V, E)$ est définit par des sommets V et des relations $E = V \times V$.
- Pour deux sommets (x, y) adjacents, le lien (x, y) est appelé **arc** de x vers y.
  - x s'appelle extrémité initiale.
  - y s'appelle extrémité finale.



Exemple

Dans un tournoi, les joueurs s'affrontent deux a deux. On a obtenus les résultats suivants:

1. Le Joueur A a battu B et D.
2. Le Joueur B a battu C et D.
3. Le Joueur C a battu A.
4. Le Joueur D a battu C.

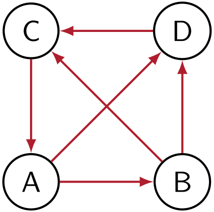


Figure: Graphe représentant les résultats du jeu.

Prédécesseurs, Successeurs

Prédécesseurs

Dans un graphe $G = (V, E)$, les **prédécesseurs** d'un sommet x notés $\Gamma^{-}(x)$.

$$\Gamma^{-}(x) = \{y \in V \mid (y, x) \in E\}$$

Prédécesseurs

Dans un graphe $G = (V, E)$, les **prédécesseurs** d'un sommet x notés $\Gamma^{-}(x)$.

$$\Gamma^{-}(x) = \{y \in V \mid (y, x) \in E\}$$

Successeurs

Dans un graphe $G = (V, E)$, les **Successeurs** d'un sommet x notés $\Gamma^{+}(x)$.

$$\Gamma^{+}(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$$

Prédécesseurs

Dans un graphe $G = (V, E)$, les **prédécesseurs** d'un sommet x notés $\Gamma^-(x)$.

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V \mid (y, x) \in E\}$$

Successeurs

Dans un graphe $G = (V, E)$, les **Successeurs** d'un sommet x notés $\Gamma^+(x)$.

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$$

Calculer $\Gamma^-(C)$ et $\Gamma^+(C)$.

Prédécesseurs

Dans un graphe $G = (V, E)$, les **prédécesseurs** d'un sommet x notés $\Gamma^-(x)$.

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V \mid (y, x) \in E\}$$

Successeurs

Dans un graphe $G = (V, E)$, les **Successeurs** d'un sommet x notés $\Gamma^+(x)$.

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$$

Calculer $\Gamma^-(C)$ et $\Gamma^+(C)$.

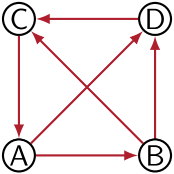


Figure: Graphe représentant les résultats du jeu.

degrés

- On garde la notion d'ordre et de taille dans un graphe orienté.
- Cependant, nous avons besoin de **différencier** entre les arcs entrants et sortants.

1. Le **demi degré** intérieur d'un sommet x est:

$$d^{-} = |\Gamma^{-}|$$

2. Le **demi degré** extérieur d'un sommet x est:

$$d^{+} = |\Gamma^{+}|$$

- On garde la notion d'ordre et de taille dans un graphe orienté.
- Cependant, nous avons besoin de **différencier** entre les arcs entrants et sortants.

1. Le **demi degré** intérieur d'un sommet x est:

$$d^{-} = |\Gamma^{-}|$$

2. Le **demi degré** extérieur d'un sommet x est:

$$d^{+} = |\Gamma^{+}|$$

Pour le graphe de la figure (2), on as:

Table: Degrés des sommets

Sommet	A	B	C	D	Total
$d^{+}(x)$	2	2	1	1	6
$d^{-}(x)$	1	1	2	2	6
$d_G(x)$	3	3	3	3	12

Théorème de degré

Théorème

block Soit $G = (V, E)$ un graphe **orienté**, nous avons alors la propriété suivante:

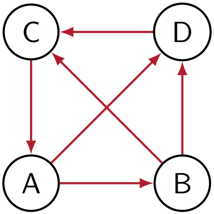
$$\sum_{x \in V} d_G^+(x) = \sum_{x \in V} d_G^-(x) \tag{1}$$

- Ainsi, la somme des degrés d'un graphe **orienté** est toujours **paire**.

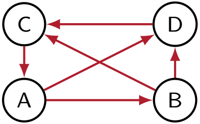
- Puisque les **arcs** possèdent une direction, on ne peut pas parler de notes de chaines et de alertcycle.
- Dans un graphe $G = (V, E)$, un **chemin** entre deux sommets x et y est une suite $x_0, x_1, \dots, x_k$ tel que

$$\begin{cases} x_0 = x \quad \text{et } x_k = y \\ (x_i, x_{i+1}) \in E \quad \forall i \in \{0, k-1\} \end{cases}$$

- Lorsque le début du chemin **coïncide** avec sa fin $(x_0 = x_k)$, on dit que le chemin est **circuit**.
- La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arcs qu'il contient.



- On peut utiliser les mêmes représentations pour un graphe oriente.
- **Matrice d'adjacence**: matrice de taille $n \times n$ représentant les arcs entre les nœuds.
- La matrice **incidence** nécessite des nombres **negatifs** pour indiquer la direction des arcs.
  - Pour un arc **entrant** on met 1.
  - Pour un arc **sortant** on met -1.



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

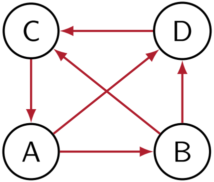
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Multiplication matrices

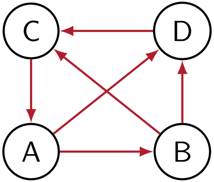
- La matrice d'adjacence possède un **avantage** de taille.
- On peut remarquer que celle ci donne tous les **chemins** de longueur $\mathbf{1}$ entre les sommets.
- Ainsi la matrice $M^2 = MM$ va montrer le **nombre de chemins** de longueur $\mathbf{2}$ entre deux sommets.

Multiplication matrices

- La matrice d'adjacence possède un **avantage** de taille.
- On peut remarquer que celle ci donne tous les **chemins** de longueur $\mathbf{1}$ entre les sommets.
- Ainsi la matrice $M^2 = MM$ va montrer le **nombre de chemins** de longueur $\mathbf{2}$ entre deux sommets.

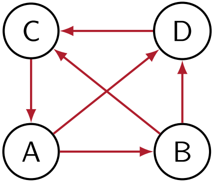


- La matrice d'adjacence possède un **avantage** de taille.
- On peut remarquer que celle ci donne tous les **chemins** de longueur $\mathbf{1}$ entre les sommets.
- Ainsi la matrice $M^2 = MM$ va montrer le **nombre de chemins** de longueur $\mathbf{2}$ entre deux sommets.



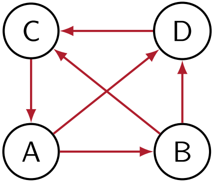
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice d'adjacence possède un **avantage** de taille.
- On peut remarquer que celle ci donne tous les **chemins** de longueur $\mathbf{1}$ entre les sommets.
- Ainsi la matrice $M^2 = MM$ va montrer le **nombre de chemins** de longueur $\mathbf{2}$ entre deux sommets.



$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice d'adjacence possède un **avantage** de taille.
- On peut remarquer que celle ci donne tous les **chemins** de longueur $\mathbf{1}$ entre les sommets.
- Ainsi la matrice $M^2 = MM$ va montrer le **nombre de chemins** de longueur $\mathbf{2}$ entre deux sommets.



$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Un graphe est dit **fortement connexe** si pour toute paire de sommets (x, y), il existe **au moins** un chemin entre x et y.
- Une composante **fortement connexe** (*Strongly Connected Component (SCC)*) est un sous-graphe qui est fortement connexe.
- On peut calculer les composantes fortement connexes d'un graphe par un algorithme dit de **marquage**:

Algorithm Algorithme de margquage

1: $k = 0$
2: choisir une sommet x et le marquer par $(+)$ et (-)
3: $k = k + 1$
4: marquer tous les successeurs de x par $(+)$.
5: marquer tous lss prédécesseurs de x par (-).
6: Les composantes marques par $(+)$ et (-) forment une composante connexe C_k.
7: Retirer tous les sommets de C_k puis recommencer.

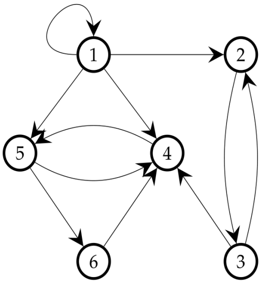


Table: Algorithme de marquage

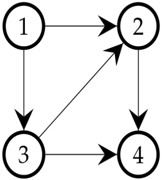
	1	2	3	4	5	6	
Marques	+-	+	+	+	+	+	$C_1 = \{1\}$
Marques		+-	+-	+	+	+	$C_1 = \{2,3\}$
Marques				+-	+-	+-	$C_1 = \{4,5,6\}$

Ordonnancement d'un graphe

- Dans un graphe orienté connexe et **sans circuit**, **l'Ordonnancement** des sommets consiste a organiser les sommet en **niveaux** tel que tous les arcs vont d'un niveau inférieur a un niveau supérieur.
- Mathématiquement, ceci consiste a propose une fonction $f : V \to \mathbb{N}$ qui donne le **rang** de chaque sommet.

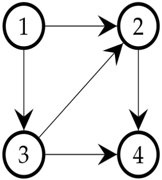
Ordonnancement d'un graphe

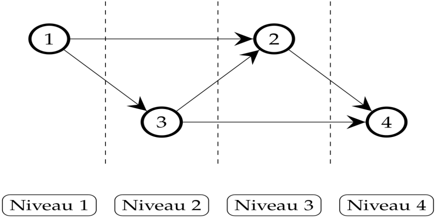
- Dans un graphe orienté connexe et **sans circuit**, **l'Ordonnancement** des sommets consiste a organiser les sommet en **niveaux** tel que tous les arcs vont d'un niveau inférieur a un niveau supérieur.
- Mathématiquement, ceci consiste a propose une fonction $f : V \to \mathbb{N}$ qui donne le **rang** de chaque sommet.

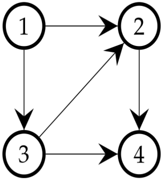


Ordonnancement d'un graphe

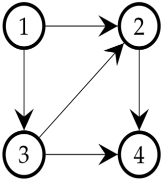
- Dans un graphe orienté connexe et **sans circuit**, **l'Ordonnancement** des sommets consiste a organiser les sommet en **niveaux** tel que tous les arcs vont d'un niveau inférieur a un niveau supérieur.
- Mathématiquement, ceci consiste a propose une fonction $f : V \to \mathbb{N}$ qui donne le **rang** de chaque sommet.






1
2
3
4

Algorithme d’ordonnancement



Algorithm Algorithme d’ordonnancement

$k = 1$ #Valeur qui représente le rang
déterminer les sommets **non classes**, dont les prédécesseurs est vide.
leur affecter le niveau k
$k = k + 1$ #passer au niveau suivant
Reprendre s’il existe d’autres sommets non **classés**.