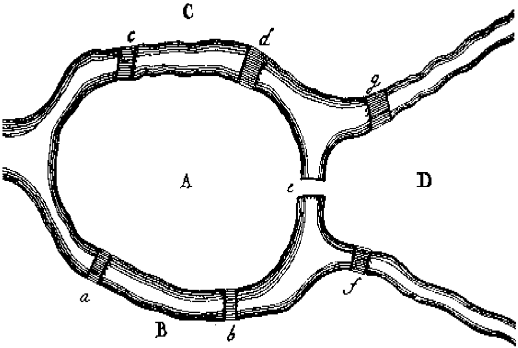
Éléments de théorie de graphes

A.Belcaid

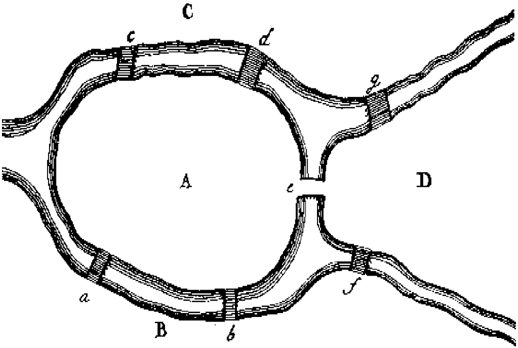
ENSA-Safi

February 19, 2022

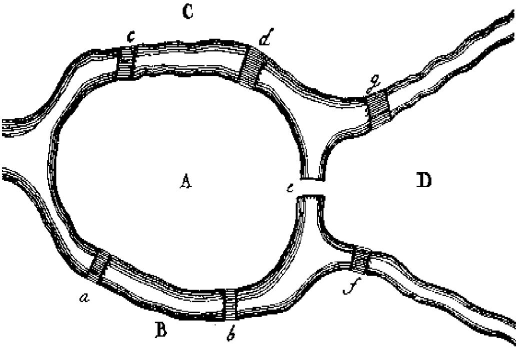
- Dans plusieurs situations de la vie **réelle**, on rencontre la notion de **graphes**.



- Dans plusieurs situations de la vie **réelle**, on rencontre la notion de **graphes**.
- Les graphes représentent un moyen de **modélisation** qui permet de formaliser et raisonner sur de nombreux problèmes.



- Dans plusieurs situations de la vie **réelle**, on rencontre la notion de **graphes**.
- Les graphes représentent un moyen de **modélisation** qui permet de formaliser et raisonner sur de nombreux problèmes.
- Les graphes permettent de modéliser des **entités** reliées par des liens qui permettent d'extraire plusieurs propriétés intéressantes.



Exemple 1

Un réseau informatique est constitué d'un ensemble de **machines**:

- Ordinateurs
- Hubs.
- Switches
- Routeurs

et des **liaisons** physiques. Comment un **routeur** arrive a calculer le chemin optimal pour connecter deux machines?

Exemples

Exemple 1

Un réseau informatique est constitué d'un ensemble de **machines**:

- Ordinateurs
- Hubs.
- Switches
- Routeurs

et des **liaisons** physiques. Comment un **routeur** arrive a calculer le chemin optimal pour connecter deux machines?

Exemple 2

En intelligence artificielle, la résolution d'un problème consiste a trouver une séquence d'actions permettant de passer une situation **initiale** a une autre **but** a travers plusieurs situations temporaires. Ces situations sont connectes entre eux par le choix d'une action.

- Prendre la gauche.
- Investir dans la bourse.
- Freiner.

Definition

Une graphe **non orienté** est defini par une paire (V, E).

- V : représente l'ensemble des **sommets** (*Vertices*).
- E : l'ensemble des **liens** (*edges*)

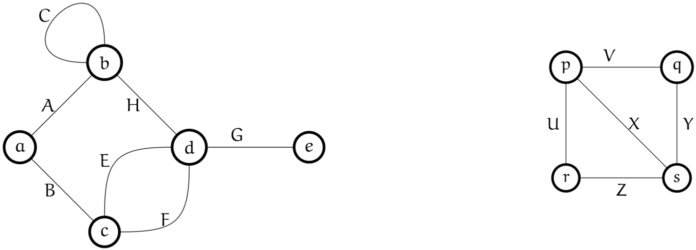
$$E = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$$

Definition

Une graphe **non orienté** est defini par une paire (V, E).

- V : représente l'ensemble des **sommets** (*Vertices*).
- E : l'ensemble des **liens** (*edges*)

$$E = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$$



Lister les **liens** des graphes de la figure.

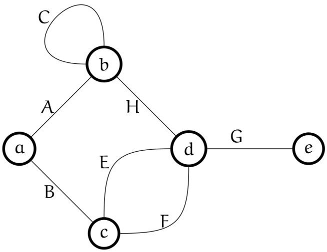
Vocabulaire

- Si une arête A part d'un sommet, on dit que A est **incidente** a x.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Si deux arêtes possedent un sommet commun, on dit qu'ils sont **adjacents**.

Poids

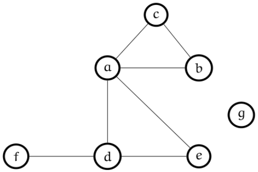
On peut associer une **valeur** a une arête. On dit que cette valeur est soit *etiquette* ou *poids*.

Un graphe possédant des valeurs aux arêtes, est dit un **graphe valué**



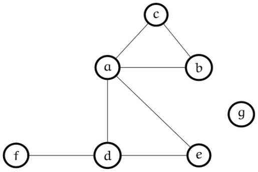
- Le nombre de sommets d'une graphe est appelé **ordre**(G).
- Le nombre d'arêtes est dit **taille** de G.
- Pour un sommet x, on note $d_G(x)$ le nombre d'arêtes incidentes à x.

Sommet	a	b	c	d	e	f	g
Degré							



- Le nombre de sommets d'une graphe est appelé **ordre**(G).
- Le nombre d'arêtes est dit **taille** de G.
- Pour un sommet x, on note $d_G(x)$ le nombre d'arêtes incidentes à x.

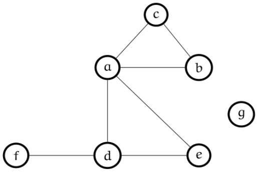
Sommet	a	b	c	d	e	f	g
Degré	4	2	2	3	2	1	0



Ordre et degré

- Le nombre de sommets d'une graphe est appelé **ordre**(G).
- Le nombre d'arêtes est dit **taille** de G.
- Pour un sommet x, on note $d_G(x)$ le nombre d'arêtes incidentes à x.

Sommet	a	b	c	d	e	f	g
Degré	4	2	2	3	2	1	0



$$d(G) = \max_x d_g(x) \tag{1}$$

Théorème

Pour tout graphe $G = (X, E)$, on l'égalité suivante:

$$\sum_{s \in X} d(s) = 2 \times \text{taille}(G)$$

La somme des degrés des sommets d'un graphe est alors toujours **paire**.

Théorème

Pour tout graphe $G = (X, E)$, on l'égalité suivante:

$$\sum_{s \in X} d(s) = 2 \times \text{taille}(G)$$

La somme des degrés des sommets d'un graphe est alors toujours **paire**.

Proposition

Une application directe de ce théorème est que le nombre de sommets ayant un degré **pair**.

Théorème

Pour tout graphe $G = (X, E)$, on l'égalité suivante:

$$\sum_{s \in X} d(s) = 2 \times \text{taille}(G)$$

La somme des degrés des sommets d'un graphe est alors toujours **paire**.

Proposition

Une application directe de ce théorème est que le nombre de sommets ayant un degré **pair**.

Question

Peut-on trouver un groupe de cinq personnes tel que chaque personne est amie avec **exactement** trois autres personnes?

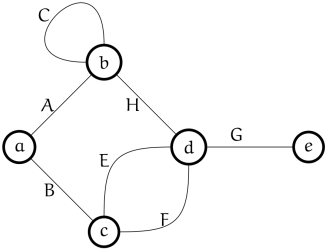
Graphe regulier

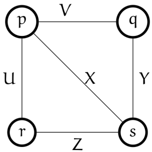
Un graphe est dit **régulier** si tous ces sommets ont le même **degré**.

Si le degré est k, alors le graphe est dit k-régulier.

Graphe simple et Multiple

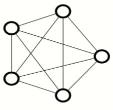
- Selon la topologie des arêtes, il existe **deux** type de graphes:
  1. Multi-graphe: Plusieurs liens peuvent exister entre deux sommets.
  2. Graphe simple: In peut y avoir qu'un seul lien (**au plus**) entre deux sommets. De plus il n y as pas de **boucle**[1].



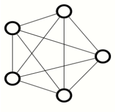


[1] arête entre un sommet et lui même

- Un graphe **simple** est dit **complet** si chaque sommet est relié a tout autre sommet.

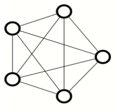


- Un graphe **simple** est dit **complet** si chaque sommet est relié a tout autre sommet.
  - Un graphe régulier contenant n sommet est note K_n.

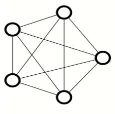


Types de graphes

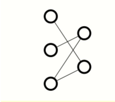
- Un graphe **simple** est dit **complet** si chaque sommet est relié a tout autre sommet.
  - Un graphe régulier contenant n sommet est note K_n.
  - La taille d'un graphe K_n est $n(n-1)/2$.



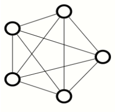
- Un graphe **simple** est dit **complet** si chaque sommet est relié a tout autre sommet.
  - Un graphe régulier contenant n sommet est note K_n.
  - La taille d'un graphe K_n est $n(n-1)/2$.



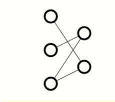
- Les sommet d'un graphe **biparti** peuvent être divisés en **deux** ensembles **disjoints** X et Y tels que les arêtes relient un sommet de X a un sommet Y.



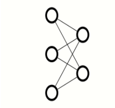
- Un graphe **simple** est dit **complet** si chaque sommet est relié a tout autre sommet.
  - Un graphe régulier contenant n sommet est note K_n.
  - La taille d'un graphe K_n est $n(n-1)/2$.



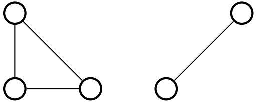
- Les sommet d'un graphe **biparti** peuvent être divisés en **deux** ensembles **disjoints** X et Y tels que les arêtes relient un sommet de X a un sommet Y.



- Dans un graphe biparti, si tout sommet de X est relie a tout sommet de Y, on dit qu'il est **biparti complet** et on le note $K_{m,n}$.



- Dans un graphe qui contient un sommet ne permettant au moins de rejoindre au moins un autre sommet.



- Les graphes **bipartis** sont utilisés pour modéliser des problèmes d'affectation d'un ensemble de sources a un ensemble de destination.
- Par exemple, Le premier ensemble peut correspondre a des **tâches** tandis que le deuxième peut correspondre a des **ressources**.

Definition

Un graphe est dit **planaire** si on peut le dessiner, on peut pas trouver des arêtes s'entrecoupant.

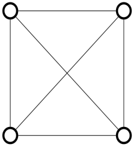


Figure: Exemple d'arêtes qui s'entrecoupent

Definition

Un graphe est dit **planaire** si on peut le dessiner, on peut pas trouver des arêtes s'entrecoupant.

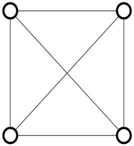


Figure: Exemple d'arêtes qui s'entrecoupent

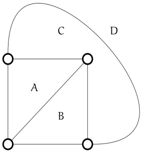


Figure: Même graphe, sans chevauchement

Définition

- Dans un graphe **planaire**, on appelle **face** une région du plan limitée par les arêtes.
- le graphe suivant possède 4 faces notés (A, B, C) et D.
- On appelle degré d'une face, le nombre d'arêtes qui la limitent.

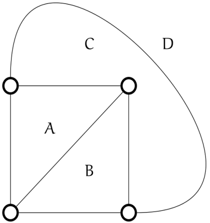


Figure: Même graphe, sans chevauchement

Propriétés Faces

Théorème

La somme des degrés des faces d'un graphe planaire est égale au **double** de sa taille.

Propriétés Faces

Théorème

La somme des degrés des faces d'un graphe planaire est égale au **double** de sa taille.

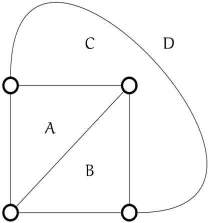
Théorème

Dans un graphe $\mathbf{G}$, soient:

- $\mathbf{S}$: son ordre ($|V|$).
- $\mathbf{A}$: sa taille ($|E|$).
- $\mathbf{R}$: le nombre des faces.

alos si G est planaire on a

$$S - A + R = 2 \tag{2}$$



Définition

Une **chaine** du sommet A vers le sommet B dans un graphe G est une suite d'arêtes $(e_k = (x_k, y_k))$ qui vérifie:

- $x_0 = A$
- $y_k = B$
- $x_{k+1} = y_k$

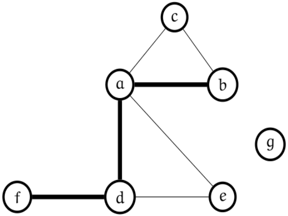


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

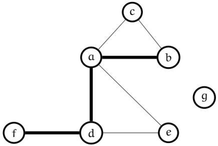


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

- Une chaine est dite **élémentaire** si aucun sommet ne figure plus qu'une seule fois.

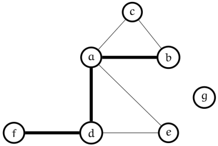


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

- Une chaine est dite **élémentaire** si aucun sommet ne figure plus qu'une seule fois.
    - (f, d, a, b) est une chaine élémentaire.

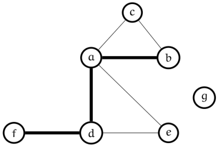


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

- Une chaine est dite **élémentaire** si aucun sommet ne figure plus qu'une seule fois.
  - (f, d, a, b) est une chaine élémentaire.
  - (a, c, b, a, d, f) ne l'est pas.

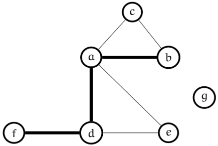


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

- Une chaine est dite **élémentaire** si aucun sommet ne figure plus qu'une seule fois.
  - (f, d, a, b) est une chaine élémentaire.
  - (a, c, b, a, d, f) ne l'est pas.
- Elle est aussi dite **simple** si aucune arête ne répète.

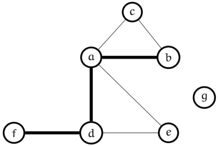


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

- Une chaine est dite **élémentaire** si aucun sommet ne figure plus qu'une seule fois.
  - (f, d, a, b) est une chaine élémentaire.
  - (a, c, b, a, d, f) ne l'est pas.
- Elle est aussi dite **simple** si aucune arête ne répète.
  - (a, c, b, a, d, f) est simple mais pas élémentaire.

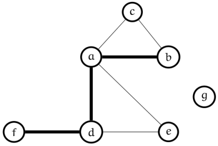


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

- Une chaine est dite **élémentaire** si aucun sommet ne figure plus qu'une seule fois.
  - (f, d, a, b) est une chaine élémentaire.
  - (a, c, b, a, d, f) ne l'est pas.
- Elle est aussi dite **simple** si aucune arête ne répète.
  - (a, c, b, a, d, f) est simple mais pas élémentaire.
- Si une chaine simple commence et se termine par le **même sommet**, On dit que cette un **cycle**.

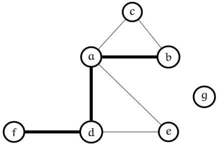


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

- Une chaine est dite **élémentaire** si aucun sommet ne figure plus qu'une seule fois.
    - (f, d, a, b) est une chaine élémentaire.
    - (a, c, b, a, d, f) ne l'est pas.
- Elle est aussi dite **simple** si aucune arête ne répète.
    - (a, c, b, a, d, f) est simple mais pas élémentaire.
- Si une chaine simple commence et se termine par le **même sommet**, On dit que cette un **cycle**.
    - (a, b, c, a) est un cycle.

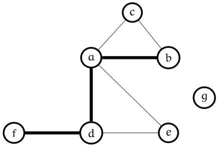


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Définitions

- Une chaine est dite **élémentaire** si aucun sommet ne figure plus qu'une seule fois.
  - (f, d, a, b) est une chaine élémentaire.
  - (a, c, b, a, d, f) ne l'est pas.
- Elle est aussi dite **simple** si aucune arête ne répète.
  - (a, c, b, a, d, f) est simple mais pas élémentaire.
- Si une chaine simple commence et se termine par le **même sommet**, On dit que cette un **cycle**.
  - (a, b, c, a) est un cycle.
  - (a, e, d, a) est un cycle.

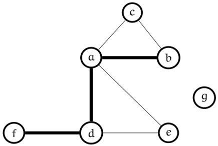


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Propriétés chaines

1. On définit la **longueur** d'une chaine par le nombre d'arêtes qu'elle contient.

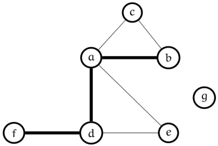


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

1. On définit la **longueur** d'une chaine par le nombre d'arêtes qu'elle contient.
   - La longueur de la chaine (b, a, d, f) est $\mathbf{3}$

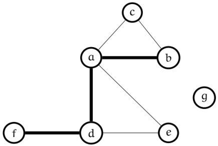


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Propriétés chaines

1. On définit la **longueur** d'une chaine par le nombre d'arêtes qu'elle contient.
   - La longueur de la chaine (b, a, d, f) est $\mathbf{3}$
2. La **distance** entre deux sommets la longueur minimale des chaines qui les relient.

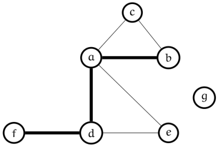


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

1. On définit la **longueur** d'une chaine par le nombre d'arêtes qu'elle contient.
   - La longueur de la chaine (b, a, d, f) est $\mathbf{3}$
2. La **distance** entre deux sommets la longueur minimale des chaines qui les relient.
   - La distance entre b et d est $\mathbf{2}$

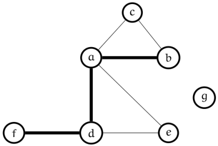


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

1. On définit la **longueur** d'une chaine par le nombre d'arêtes qu'elle contient.
   - La longueur de la chaine (b, a, d, f) est $\mathbf{3}$
2. La **distance** entre deux sommets la longueur minimale des chaines qui les relient.
   - La distance entre b et d est $\mathbf{2}$
3. La **diamètre** d'un graphe est la distance maximale entre deux sommets.

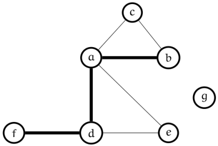


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Propriétés chaines

1. On définit la **longueur** d'une chaine par le nombre d'arêtes qu'elle contient.
   - La longueur de la chaine (b, a, d, f) est $\mathbf{3}$
2. La **distance** entre deux sommets la longueur minimale des chaines qui les relient.
   - La distance entre b et d est $\mathbf{2}$
3. La **diamètre** d'un graphe est la distance maximale entre deux sommets.

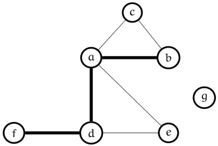


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Propriétés chaines

1. On définit la **longueur** d'une chaine par le nombre d'arêtes qu'elle contient.
   - La longueur de la chaine (b, a, d, f) est $\mathbf{3}$
2. La **distance** entre deux sommets la longueur minimale des chaines qui les relient.
   - La distance entre b et d est $\mathbf{2}$
3. La **diamètre** d'un graphe est la distance maximale entre deux sommets.

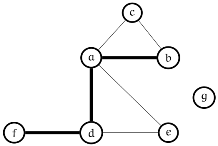


Figure: Exemple de chaine b,a,d,f

Théorème

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle permet de passer **seule fois** par tous les arêtes.

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle permet de passer **seule fois** par tous les arêtes.
- Si en plus , cette chaine est un cycle, on parle alors de **cycle eulérien**.

Graphe Eulérien

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle permet de passer **seule fois** par tous les arêtes.
- Si en plus , cette chaine est un cycle, on parle alors de **cycle eulérien**.
- Si le graphe possède un cycle eulérien, il est dit **graphe eulérien**.

Graphe Eulérien

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle permet de passer **seule fois** par tous les arêtes.
- Si en plus , cette chaine est un cycle, on parle alors de **cycle eulérien**.
- Si le graphe possède un cycle eulérien, il est dit **graphe eulérien**.
- Un graphe eulérien, peut être tracé, sans **lever la main** et passer deux fois par le même arête.

Graphe Eulérien

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle permet de passer **seule fois** par tous les arêtes.
- Si en plus , cette chaine est un cycle, on parle alors de **cycle eulérien**.
- Si le graphe possède un cycle eulérien, il est dit **graphe eulérien**.
- Un graphe eulérien, peut être tracé, sans **lever la main** et passer deux fois par le même arête.
- l'origine de cette appellation, est le problème des cours de Konigsberg, qui consiste a passer par caque pond une seule fois. Euler était le premier a le résoudre.

Graphe Eulérien

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle permet de passer **seule fois** par tous les arêtes.
- Si en plus , cette chaine est un cycle, on parle alors de **cycle eulérien**.
- Si le graphe possède un cycle eulérien, il est dit **graphe eulérien**.
- Un graphe eulérien, peut être tracé, sans **lever la main** et passer deux fois par le même arête.
- l'origine de cette appellation, est le problème des cours de Konigsberg, qui consiste a passer par caque pond une seule fois. Euler était le premier a le résoudre.

Graphe Eulérien

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle permet de passer **seule fois** par tous les arêtes.
- Si en plus , cette chaine est un cycle, on parle alors de **cycle eulérien**.
- Si le graphe possède un cycle eulérien, il est dit **graphe eulérien**.
- Un graphe eulérien, peut être tracé, sans **lever la main** et passer deux fois par le même arête.
- l'origine de cette appellation, est le problème des cours de Konigsberg, qui consiste a passer par caque pond une seule fois. Euler était le premier a le résoudre.

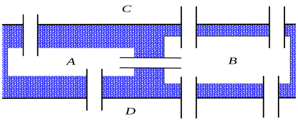


Figure: Carte des courts d'eau Konigsberg

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle permet de passer **seule fois** par tous les arêtes.
- Si en plus , cette chaine est un cycle, on parle alors de **cycle eulérien**.
- Si le graphe possède un cycle eulérien, il est dit **graphe eulérien**.
- Un graphe eulérien, peut être tracé, sans **lever la main** et passer deux fois par le même arête.
- l'origine de cette appellation, est le problème des cours de Konigsberg, qui consiste a passer par caque pond une seule fois. Euler était le premier a le résoudre.

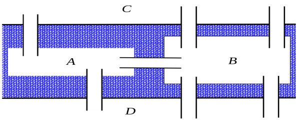


Figure: Carte des courts d'eau Konigsberg

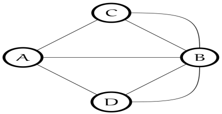


Figure: Graphe correspondant a ce problème

Condition Graphe Eulérien

Théorème

Un graphe **connexe** admet une chaine eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré **pairs** sauf éventuellement deux d'entre eux.

Condition Graphe Eulérien

Théorème

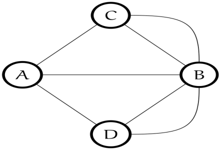
Un graphe **connexe** admet une chaine eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré **pairs** sauf éventuellement deux d'entre eux.

Théorème

Un graphe **connexe** admet une chaine eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré **pairs** sauf éventuellement deux d'entre eux.

Théorème

Un graphe **connexe** admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous ces sommets sont de degré **pair**.



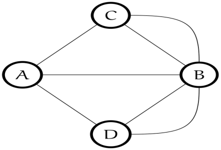
Condition Graphe Eulérien

Théorème

Un graphe **connexe** admet une chaine eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré **pairs** sauf éventuellement deux d'entre eux.

Théorème

Un graphe **connexe** admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous ces sommets sont de degré **pair**.



- ce graphe ne possède ni chaine ni cycle eulérienne. car il possede trois sommets ayant un degre impair.

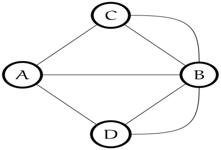
Condition Graphe Eulérien

Théorème

Un graphe **connexe** admet une chaine eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré **pairs** sauf éventuellement deux d'entre eux.

Théorème

Un graphe **connexe** admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous ces sommets sont de degré **pair**.



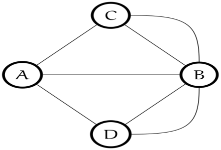
- ce graphe ne possède ni chaine ni cycle eulérienne. car il possede trois sommets ayant un degre impair.
  - A degre 3.

Théorème

Un graphe **connexe** admet une chaine eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré **pairs** sauf éventuellement deux d'entre eux.

Théorème

Un graphe **connexe** admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous ces sommets sont de degré **pair**.



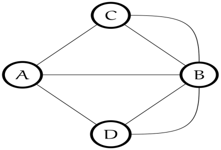
- ce graphe ne possède ni chaine ni cycle eulérienne. car il possede trois sommets ayant un degre impair.
  - A degre 3.
  - C degre 3.

Théorème

Un graphe **connexe** admet une chaine eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré **pairs** sauf éventuellement deux d'entre eux.

Théorème

Un graphe **connexe** admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous ces sommets sont de degré **pair**.



- ce graphe ne possède ni chaine ni cycle eulérienne. car il possede trois sommets ayant un degre impair.
  - A degre 3.
  - C degre 3.
  - D degre 3.

Question

Pour le graphe dans la figure 9.

Question

Pour le graphe dans la figure 9.

- Est ce qu'il possède une chaine eulérienne.

Question

Pour le graphe dans la figure 9.

- Est ce qu'il possède une chaine eulérienne.
- Est ce qu'il possède un cycle eulérien.

Question

Pour le graphe dans la figure 9.

- Est ce qu'il possède une chaine eulérienne.
- Est ce qu'il possède un cycle eulérien.

Question

Pour le graphe dans la figure 9.

- Est ce qu'il possède une chaine eulérienne.
- Est ce qu'il possède un cycle eulérien.

1. Dans le graphe (a, b, c) on un degré pair. Mais les sommets (d, e) ont un degré impair.

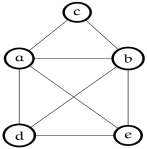


Figure: Problème de l'enveloppe

Question

Pour le graphe dans la figure 9.

- Est ce qu'il possède une chaine eulérienne.
- Est ce qu'il possède un cycle eulérien.

1. Dans le graphe (a, b, c) on un degré pair. Mais les sommets (d, e) ont un degré impair.
2. Le graphe possède une **chaine eulérienne**.

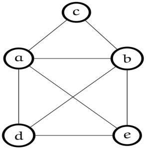


Figure: Problème de l'enveloppe

Question

Pour le graphe dans la figure 9.

- Est ce qu’il possède une chaine eulérienne.
- Est ce qu’il possède un cycle eulérien.

1. Dans le graphe (a, b, c) on un degré pair. Mais les sommets (d, e) ont un degré impair.
2. Le graphe possède une **chaine eulérienne**.
3. Le graphe n’est pas **eulerien**.

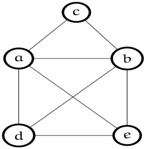


Figure: Problème de l’enveloppe

Question

Pour le graphe dans la figure 9.

- Est ce qu'il possède une chaine eulérienne.
- Est ce qu'il possède un cycle eulérien.

1. Dans le graphe (a, b, c) on un degré pair. Mais les sommets (d, e) ont un degré impair.
2. Le graphe possède une **chaine eulérienne**.
3. Le graphe n'est pas **eulerien**.
4. Une chaine eulérienne est

$$d, a, c, b, e, a, b, d, e.$$

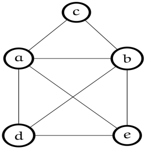


Figure: Problème de l'enveloppe

- Une question qui se pose: **Existe il un algorithme pour trouver une chaine eulérienne en cas ou elle existe**.

Algorithm Algorithme de Fleury

if le graphe est eulérien **then**
    commencer par n'importe quel sommet
else
    Commencer par un sommet dont le degré est impair
end if
choisir le prochaine en fonctions des arêtes incidentes non encore visités. Si on doit choisir entre un pont et non-pont alors on choisit un **non-pont**.
Quand une arête est sélectionne, elle est enlevée du graphe.
S'arrêter quand il n'as plus d'arêtes.

Algorithm Algorithme pour vérifier si une arête (u, v) pont ou non

```
if il y a un seul sommet adjacent a u (qui est v) then
    C'est Faux.
else
    Calculer le nombre de sommet accessible depuis u qu'on note a.
    Enlever l'arête (u, v) puis calculer ce nombre qu'on note b.
    if a > b then
        c'est Vrai
    else
        C'est Faux
    end if
end if
```

Définition

Dans un graphe G, on appelle un **cycle hamiltonien** un cycle passant **seule fois** par chacun des sommets.

Si un tel cycle existe, on dit que le graphe est **hamiltonien**.

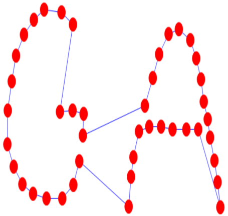


Figure: Exemple de graphe Hamiltonien

Définition

Dans un graphe G, on appelle un **cycle hamiltonien** un cycle passant **seule fois** par chacun des sommets.

Si un tel cycle existe, on dit que le graphe est **hamiltonien**.

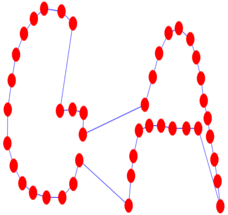


Figure: Exemple de graphe Hamiltonien

- L'application classique d'un graphe hamiltonien, est le problème du **voyageur** qui consiste d'une personne qui doit de déplacer dans toutes les villes une seule fois tout en minimisant le cout des déplacements.

Propriétés graphe Hamiltonien

- un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien.
- Si un sommet est de degré 2 alors ces arêtes incidents doivent forcement faire parti du cycle **hamiltonien**.
- Les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

- un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien.
- Si un sommet est de degré 2 alors ces arêtes incidents doivent forcement faire parti du cycle **hamiltonien**.
- Les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute paire (x, y) de sommets non adjacents, on

$$d(x) + d(y) \geqslant n$$

Alors G est hamiltonien.

Propriétés graphe Hamiltonien

- un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien.
- Si un sommet est de degré 2 alors ces arêtes incidents doivent forcement faire parti du cycle **hamiltonien**.
- Les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute paire (x, y) de sommets non adjacents, on

$$d(x) + d(y) \geqslant n$$

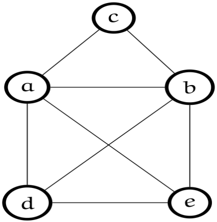
Alors G est hamiltonien.

Corollaire

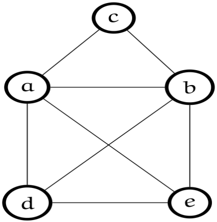
Pour un graphe G hamiltonien avec $n > 3$, si

$$\forall x \in V, \quad d(x) \geqslant \frac{n}{2}.$$

alors le graphe est hamiltonien.


c
a
b
d
e

Verification Hamiltonien



Sommet	$a(d_a = 4)$	$a(d_b = 4)$	$c(d_c = 2)$	$d(d_d = 3)$	$e(d_e = 3)$
a	x				
b		x			
c			x	$\mathbf{d(c) + d(d) = 5}$	$\mathbf{d(c) + d(e) = 5}$
d				x	
e					x

Définition

Soit $G = (X, E)$ un graphe, on appelle **graphe partiel** le graphe $G^{'} = (X, E^{'})$ tel que $E^{'} \subset E$.

On obtient $G^{'}$ en enlevant des arêtes de G.

Définition

Soit $G = (X, E)$ un graphe, on appelle **graphe partiel** le graphe $G' = (X, E')$ tel que $E' \subset E$.

On obtient G' en enlevant des arêtes de G.

Définition

Soit $A \subset X$ un ensemble de sommets. On appelle **sous- graphe** induit par A, le graphe $(A, E(A))$ dont les sommets appartient à A.

Définition

On appelle **clique**, d'un graphe G, un sous graphe **complet** de G.

Parmi toutes les cliques, la clique **maximale**[a] possèdent des propriétés intéressantes dans certains algorithmes de RO comme la coloration.

[a] possedant le plus de sommets

Définition

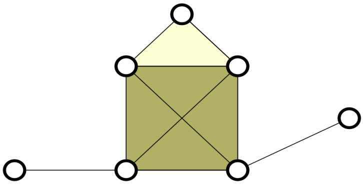
Soit $A \subset X$ un ensemble de sommets. On appelle **sous- graphe** induit par A, le graphe $(A, E(A))$ dont les sommets appartient à A.

Définition

On appelle **clique**, d'un graphe G, un sous graphe **complet** de G.

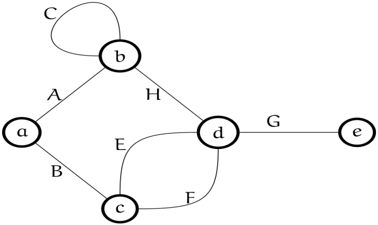
Parmi toutes les cliques, la clique **maximale**[a] possèdent des propriétés intéressantes dans certains algorithmes de RO comme la coloration.

[a] possedant le plus de sommets



Question

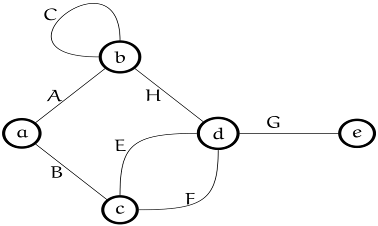
Comment peut on représenter un graphe d'une manière **non graphique**.
Ou comment peut on stocker un graphe dans un support informatique?



Il existe trois méthodes pour définir cette représentation:

Question

Comment peut on représenter un graphe d'une manière **non graphique**.
Ou comment peut on stocker un graphe dans un support informatique?

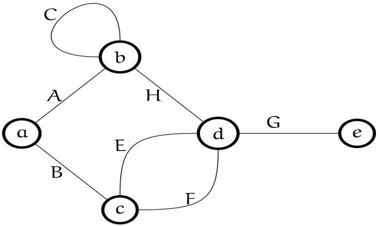


Il existe trois méthodes pour définir cette représentation:

- Matrice d'**adjacence**.

Question

Comment peut on représenter un graphe d'une manière **non graphique**.
Ou comment peut on stocker un graphe dans un support informatique?

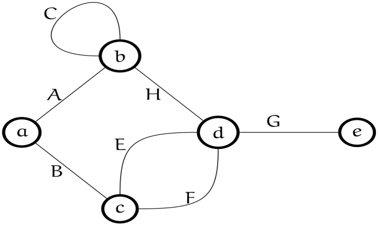


Il existe trois méthodes pour définir cette représentation:

- Matrice d'**adjacence**.
- Matrice d'**incidence**.

Question

Comment peut on représenter un graphe d'une manière **non graphique**.
Ou comment peut on stocker un graphe dans un support informatique?



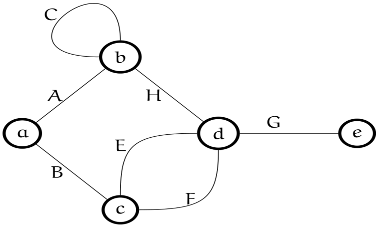
Il existe trois méthodes pour définir cette représentation:

- Matrice d'**adjacence**.
- Matrice d'**incidence**.
- Liste d'**adjacence**.

Définition

la **matrice d'adjacence**, la plus utilisée, représente le **voisinage** des sommets.

- C'est une matrice carrée de taille n. (n est l'ordre du graphe).
- L'élément (i, j) de cette matrice représente le nombre d'arêtes entre le sommet i et j.
- Une boucle est comptée **deux fois**.

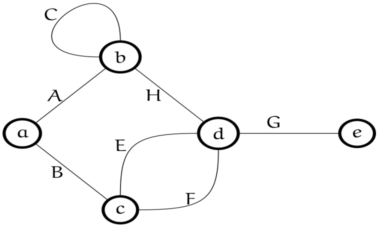


$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition

la **matrice d'incidence**, permet de représenter **a la fois** les sommets et les arêtes.

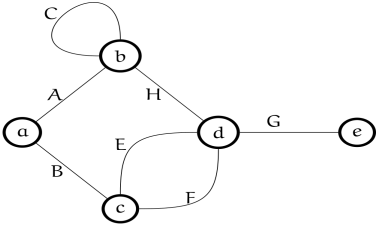
- Les lignes correspondent aux sommets.
- Les colonnes correspondent aux arêtes.
- Si une arête est incidente a un sommet on met 1.
- Dans le cas d'une boucle, on met 2.



Définition

la **matrice d'incidence**, permet de représenter **a la fois** les sommets et les arêtes.

- Les lignes correspondent aux sommets.
- Les colonnes correspondent aux arêtes.
- Si une arête est incidente a un sommet on met 1.
- Dans le cas d'une boucle, on met 2.

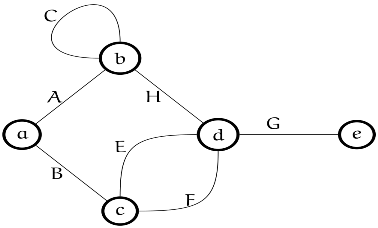


$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition

Une autre représentation **non matricielle** est également utilisée. Elle est Appelée **liste des adjacences**.

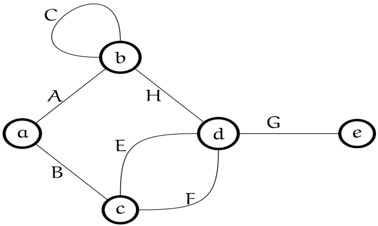
- Donner a chaque sommet, la liste des sommets **adjacents**.



Définition

Une autre représentation **non matricielle** est également utilisée. Elle est Appelée **liste des adjacences**.

- Donner a chaque sommet, la liste des sommets **adjacents**.



Sommet	Liste d'adjacents
a	b, c
b	a,b,b,d
c	a,d,d
d	b,c,c,e
e	d

Définition

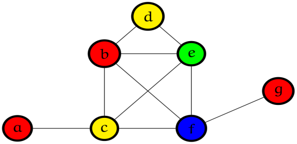


Figure: Exemple coloration de graphe

Définition

- La **coloration** des sommets d'un graphe simple consiste a donner une couleur (*abstraite*) a chaque sommet sans que deux sommet adjacents ne puissent **avoir la même couleur**.

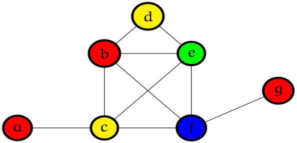


Figure: Exemple coloration de graphe

Définition

- La **coloration** des sommets d'un graphe simple consiste a donner une couleur (*abstraite*) a chaque sommet sans que deux sommet adjacents ne puissent **avoir la même couleur**.
- Une coloration d'un graphe en k couleurs est une partition des sommets en k **stables**.

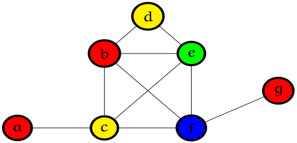


Figure: Exemple coloration de graphe

Définition

- La **coloration** des sommets d'un graphe simple consiste a donner une couleur (*abstraite*) a chaque sommet sans que deux sommet adjacents ne puissent **avoir la même couleur**.
- Une coloration d'un graphe en k couleurs est une partition des sommets en k **stables**.
- On appelle **nombre chromatique** d'un graphe G(note $\delta(G)$) le nombre **minimal** de couleurs nécessaires à le colorier.

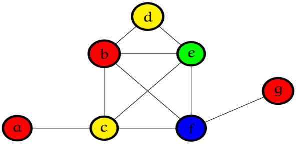


Figure: Exemple coloration de graphe

Calcul nombre chromatique

- D'une manière générale, il est très difficile de calculer ce nombre pour un graphe quelconque.

Théorème

Tout graphe **planaire** peut être coloré avec **au plus quatre** couleurs.

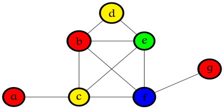
- Si G n'est pas complet alors:

$$\delta(G) \leqslant d(G) = \{max_x d(x)\}$$

- Si $G = K_n$ est complet, alors:

$$\delta(G) = n$$

- Le nombre chromatique est supérieur a l'ordre de sa **clique maximale**.



Heuristique

- Il existe des algorithmes d'**approximation** permettant de donner un bon nombre de couleurs (pas forcement minimal).
- L'algorithme de **Welsh et Powell** constitue un bon exemple:

Algorithm Algorithme de Welsh et Powell

```
trier les sommets en ordre décroissant des degré.
if il reste des sommets sans couleur then
    attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet.
    Attribuer cette couleur a chaque sommet non adjacent.
end if
```