

# Introduction a la recherche opérationnelle

**A.Belcaid**

ENSA-Safi

March 10, 2022

- 1 Présentation
- 2 Exemples
- 3 Modélisation
- 4 Histoire
- 5 Plan du cours

- Créée en **Angleterre** durant la deuxième guerre mondiale pour aider a décisions **militaires** comme la:

- Créée en **Angleterre** durant la deuxième guerre mondiale pour aider a décisions **militaires** comme la:
  - Positionnement des radars.

- Créée en **Angleterre** durant la deuxième guerre mondiale pour aider a décisions **militaires** comme la:
  - Positionnement des radars.
  - Gestion de convois d'approvisionnement.

- Créée en **Angleterre** durant la deuxième guerre mondiale pour aider a décisions **militaires** comme la:
  - Positionnement des radars.
  - Gestion de convois d'approvisionnement.
- **Dictionnaire Cambridge**

- Créée en **Angleterre** durant la deuxième guerre mondiale pour aider a décisions **militaires** comme la:
  - Positionnement des radars.
  - Gestion de convois d'approvisionnement.
- **Dictionnaire Cambridge**

## Définition

The Systematic study of how best to **solve problems** in **business** and **industry**.

- Créée en **Angleterre** durant la deuxième guerre mondiale pour aider a décisions **militaires** comme la:
  - Positionnement des radars.
  - Gestion de convois d'approvisionnement.
- **Dictionnaire Cambridge**

## Définition

The Systematic study of how best to **solve problems** in **business** and **industry**.

- **Wikipedia:**



- Créée en **Angleterre** durant la deuxième guerre mondiale pour aider a décisions **militaires** comme la:
  - Positionnement des radars.
  - Gestion de convois d'approvisionnement.
- **Dictionnaire Cambridge**

## Définition

The Systematic study of how best to **solve problems** in **business** and **industry**.

- **Wikipedia:**

## Définition

is the use of **mathematical models**, statistics and **algorithms** to aid in **decision making**.

- La **science** de chercher la solution d'un problème.

---

<sup>1</sup>A définir par complexité

- La **science** de chercher la solution d'un problème.
  - Meilleur temps.

---

<sup>1</sup>A définir par complexité

- La **science** de chercher la solution d'un problème.
  - Meilleur temps.
  - Meilleur coût<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>A définir par complexité

- La **science** de chercher la solution d'un problème.
  - Meilleur temps.
  - Meilleur coût<sup>1</sup>
- Approche **quantitative** pour produire les meilleurs solutions.

---

<sup>1</sup>A définir par complexité

- La **science** de chercher la solution d'un problème.
  - Meilleur temps.
  - Meilleur coût<sup>1</sup>
- Approche **quantitative** pour produire les meilleurs solutions.
- Ensemble d'outils et techniques liés permettant une approche analytique de problèmes lié a la **décision**:

---

<sup>1</sup>A définir par complexité

- La **science** de chercher la solution d'un problème.
  - Meilleur temps.
  - Meilleur coût<sup>1</sup>
- Approche **quantitative** pour produire les meilleurs solutions.
- Ensemble d'outils et techniques liés permettant une approche analytique de problèmes lié a la **décision**:
  - Science de **gestion**.

---

<sup>1</sup>A définir par complexité

- La **science** de chercher la solution d'un problème.
  - Meilleur temps.
  - Meilleur coût<sup>1</sup>
- Approche **quantitative** pour produire les meilleurs solutions.
- Ensemble d'outils et techniques liés permettant une approche analytique de problèmes lié a la **décision**:
  - Science de **gestion**.
  - Science de **décision**.

---

<sup>1</sup>A définir par complexité



- La **science** de chercher la solution d'un problème.
  - Meilleur temps.
  - Meilleur coût<sup>1</sup>
- Approche **quantitative** pour produire les meilleurs solutions.
- Ensemble d'outils et techniques liés permettant une approche analytique de problèmes lié a la **décision**:
  - Science de **gestion**.
  - Science de **décision**.
  - Méthodes d'**optimisation**.

---

<sup>1</sup>A définir par complexité

- La **science** de chercher la solution d'un problème.
  - Meilleur temps.
  - Meilleur coût<sup>1</sup>
- Approche **quantitative** pour produire les meilleurs solutions.
- Ensemble d'outils et techniques liés permettant une approche analytique de problèmes lié a la **décision**:
  - Science de **gestion**.
  - Science de **décision**.
  - Méthodes d'**optimisation**.
  - **Programmation** mathématique.

---

<sup>1</sup>A définir par complexité

Face a un problème pratique de **décision**:

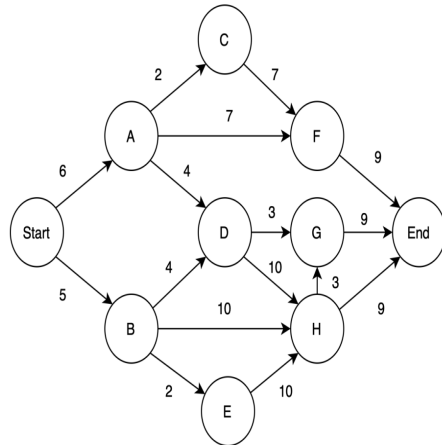
- **Aspects mathématiques:**
  - Contraintes
  - Objectif.
  - Simplification.
- **Modélisation:**
  - Théorie de graphes.
  - Programmation linéaire.
  - Programmation par contraintes.
- **Analyse de modelés**
  - Étude de complexité.



- Deux personnes veulent organiser une fête. Ils ont besoin de compléter les tâches suivantes:
- Une tâche doit être affectée à une seule personne.
- Une personne ne peut effectuer qu'une seule tâche à la fois.
- Comment **assigner** ces tâches, pour les terminer dans le plus **court temps**.
- Quelles sont les **ressources** et notre **objectif**.

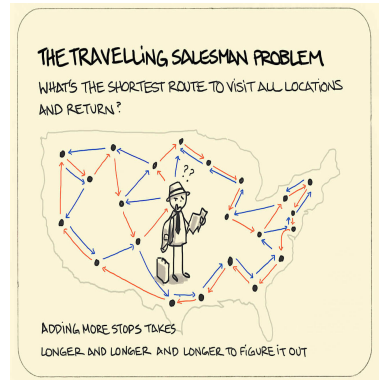
ID	task	Temps (min)
1	Boiling boba	20
2	Brewing milk tea	30
3	baking cookies	60
4	desinging poster	15
5	renting handcart	25

- $n$  ouvriers doivent compléter  $m$  tâches.
  - Certains tâches doivent **précéder** d'autres.
  - Certains tâches ne peuvent pas être effectuées par certains ouvriers.
  - Certains tâches peuvent être divisées entre ouvriers.
  - Le temps de chaque tâches diffère selon l'ouvrier.
- Combien de **temps** nous faut il pour compléter ce projet?



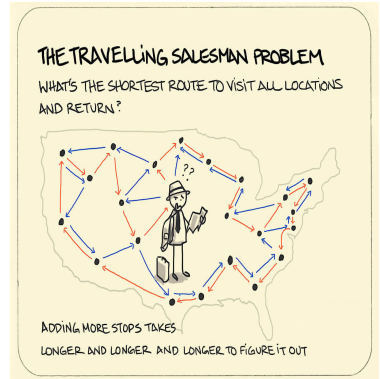
# Traveling Salesman Problem

- Un voyageur de commerce, basé à Rabat, doit visiter ses clients a travers le Maroc.



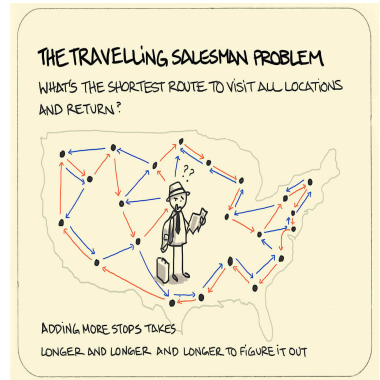
# Traveling Salesman Problem

- Un voyageur de commerce, basé à Rabat, doit visiter ses clients a travers le Maroc.
- Il souhaite effectuer la **tournée** la plus **courte** possible.



# Traveling Salesman Problem

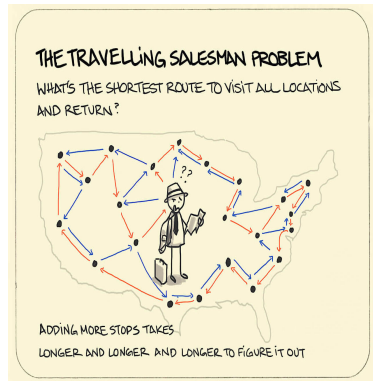
- Un voyageur de commerce, basé à Rabat, doit visiter ses clients a travers le Maroc.
- Il souhaite effectuer la **tournée** la plus **courte** possible.
- **Données:**  $n$  villes, avec une matrice des routes entre celles ci.





# Traveling Salesman Problem

- Un voyageur de commerce, basé à Rabat, doit visiter ses clients a travers le Maroc.
- Il souhaite effectuer la **tournée** la plus **courte** possible.
- **Données:**  $n$  villes, avec une matrice des routes entre celles ci.
- **Solution:** Un **cycle** qui doit visiter une ville qu'une seule fois.





- **Décisions clés:**



- **Décisions clés:**
  - Comment délivrer **6.5** millions articles a plus de **220** pays chaque jour?



- **Décisions clés:**

- Comment délivrer **6.5** millions articles a plus de **220** pays chaque jour?
- Dans chaque région, **Où doit en** installer des centres de distribution.



- **Décisions clés:**

- Comment délivrer **6.5** millions articles a plus de **220** pays chaque jour?
- Dans chaque région, **Où doit en** installer des centres de distribution.
- Dans chaque centre, comment **classifier et trier** les articles.



- **Décisions clés:**

- Comment délivrer **6.5** millions articles a plus de **220** pays chaque jour?
- Dans chaque région, **Où doit en** installer des centres de distribution.
- Dans chaque centre, comment **classifier et trier** les articles.
- Dans chaque ville, comment choisir les **routes**.



- **Décisions clés:**
  - Comment délivrer **6.5** millions articles a plus de **220** pays chaque jour?
  - Dans chaque région, **Où doit en** installer des centres de distribution.
  - Dans chaque centre, comment **classifier et trier** les articles.
  - Dans chaque ville, comment choisir les **routes**.
- **Comment résoudre?:**



- **Décisions clés:**
  - Comment délivrer **6.5** millions articles a plus de **220** pays chaque jour?
  - Dans chaque région, **Où doit en** installer des centres de distribution.
  - Dans chaque centre, comment **classifier et trier** les articles.
  - Dans chaque ville, comment choisir les **routes**.
- **Comment résoudre?:**
  - Un **système d'information** bien désigne.





- **Décisions clés:**

- Comment délivrer **6.5** millions articles a plus de **220** pays chaque jour?
- Dans chaque région, **Où doit en** installer des centres de distribution.
- Dans chaque centre, comment **classifier et trier** les articles.
- Dans chaque ville, comment choisir les **routes**.

- **Comment résoudre?:**

- Un **système d'information** bien désigne.
- **Recherche opérationnelle**.

- Vous préparer une randonnée. Vous avez des objets utiles a prendre avec vous.

ID	item	Poids	valeur
1	Compas	0.5	6
2	Hachette	1.5	5
3	Allumettes	0.4	4
4	bâche	1	4
5	Télescope	1.1	4
6	Cylindre	1.6	4
7	Jouet	0.8	1

- Vous préparer une randonnée. Vous avez des objets utiles a prendre avec vous.
- Malheureusement votre **sac a dos** ne peut supporter que 5 kilograms.

ID	item	Poids	valeur
1	Compas	0.5	6
2	Hachette	1.5	5
3	Allumettes	0.4	4
4	bâche	1	4
5	Télescope	1.1	4
6	Cylindre	1.6	4
7	Jouet	0.8	1

- Vous préparer une randonnée. Vous avez des objets utiles a prendre avec vous.
- Malheureusement votre **sac a dos** ne peut supporter que 5 kilograms.
- Un objet ne peut pas être **divisé**. Soit on le prend, soit on le laisse.

ID	item	Poids	valeur
1	Compas	0.5	6
2	Hachette	1.5	5
3	Allumettes	0.4	4
4	bâche	1	4
5	Télescope	1.1	4
6	Cylindre	1.6	4
7	Jouet	0.8	1

- Vous préparer une randonnée. Vous avez des objets utiles a prendre avec vous.
- Malheureusement votre **sac a dos** ne peut supporter que 5 kilograms.
- Un objet ne peut pas être **divisé**. Soit on le prend, soit on le laisse.
- Quels sont les objets **outils** qu'on doit prendre?

ID	item	Poids	valeur
1	Compas	0.5	6
2	Hachette	1.5	5
3	Allumettes	0.4	4
4	bâche	1	4
5	Télescope	1.1	4
6	Cylindre	1.6	4
7	Jouet	0.8	1

- Choix **Glouton** selon le poids-valeur rapport.

ID	item	Poids	valeur	valeur / poids
1	Compas	0.5	6	12
2	Hachette	1.5	5	3.33
3	Allumettes	0.4	4	10
4	bâche	1	4	4
5	Télescope	1.1	4	2.73
6	Cylindre	1.6	4	2.5
7	Jouet	0.8	1	1.25

- Choix **Glouton** selon le poids-valeur rapport.
- Solution **Glouton**: prendre les articles {1, 2, 3, 4, 5}. Valeur total **22**.

ID	item	Poids	valeur	valeur / poids
1	Compas	0.5	6	12
2	Hachette	1.5	5	3.33
3	Allumettes	0.4	4	10
4	bâche	1	4	4
5	Télescope	1.1	4	2.73
6	Cylindre	1.6	4	2.5
7	Jouet	0.8	1	1.25

- Choix **Glouton** selon le poids-valeur rapport.
- Solution **Glouton**: prendre les articles {1, 2, 3, 4, 5}. Valeur total **22**.
- Solution **optimale** est de prendre {1, 2, 3, 4, 6} avec un total **23**.

ID	item	Poids	valeur	valeur / poids
1	Compas	0.5	6	12
2	Hachette	1.5	5	3.33
3	Allumettes	0.4	4	10
4	bâche	1	4	4
5	Télescope	1.1	4	2.73
6	Cylindre	1.6	4	2.5
7	Jouet	0.8	1	1.25



- Choix **Glouton** selon le poids-valeur rapport.
- Solution **Glouton**: prendre les articles {1, 2, 3, 4, 5}. Valeur total **22**.
- Solution **optimale** est de prendre {1, 2, 3, 4, 6} avec un total **23**.
- Comment peut on **formuler** ce problème?

ID	item	Poids	valeur	valeur / poids
1	Compas	0.5	6	12
2	Hachette	1.5	5	3.33
3	Allumettes	0.4	4	10
4	bâche	1	4	4
5	Télescope	1.1	4	2.73
6	Cylindre	1.6	4	2.5
7	Jouet	0.8	1	1.25

On doit poser **quatre** questions:

- 1 Sur quelles quantités peut-on travailler?

On doit poser **quatre** questions:

- ① Sur quelles quantités peut-on travailler?
- ② Que cherche-t-on a **optimiser**

On doit poser **quatre** questions:

- ① Sur quelles quantités peut-on travailler?
- ② Que cherche-t-on a **optimiser**
- ③ Quelles sont les **restrictions** du problème?

On doit poser **quatre** questions:

- ① Sur quelles quantités peut-on travailler?
- ② Que cherche-t-on a **optimiser**
- ③ Quelles sont les **restrictions** du problème?
- ④ Quelle est la formulation scientifique a considérer?

- **Variables de Décision:** Variables qu'on peut contrôler.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si object } i \text{ est choisi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

- **Variables de Décision:** Variables qu'on peut contrôler.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si object } i \text{ est choisi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

- **Fonction objective:** Qu'est ce qu'on cherche a optimiser:

$$\max 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 4x_6 + x_7 \quad (2)$$

- **Variables de Décision:** Variables qu'on peut contrôler.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si object } i \text{ est choisi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

- **Fonction objective:** Qu'est ce qu'on cherche a optimiser:

$$\max 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 4x_6 + x_7 \quad (2)$$

- **Contraintes** Les limitations du problème

$$0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.4x_3 + x_4 + 1.1x_5 + 1.6x_6 + 0.8x_7 \leq 5 \quad (3)$$

et

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, 7 \quad (4)$$



- Si on combine tous ces informations, on obtient la **formulation (modèle)** suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 4x_6 + x_7 \\ \text{s.t} \quad 0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.4x_3 + x_4 + 1.1x_5 + 1.6x_6 + 0.8x_7 \leq 5 \\ \quad \quad x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, 7 \end{array} \right.$$

- Si on considère que  $w_i$  les poids.
- les  $v_i$  les valeurs de chaque objet.
- $n$  le nombre d'objets et  $B$  la capacité maximale.
- Une formulation plus **compacte (Integer Programming(IP))**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ \text{s.t} \quad \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq B \\ \quad \quad x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!
- Il as servi dans la deuxième guerre mondiale dans la **planification** des routes.

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!
- Il as servi dans la deuxième guerre mondiale dans la **planification** des routes.
  - Chaque plan est appelé **programme**.

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!
- Il as servi dans la deuxième guerre mondiale dans la **planification** des routes.
  - Chaque plan est appelé **programme**.
- Il a trouvé que:

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!
- Il as servi dans la deuxième guerre mondiale dans la **planification** des routes.
  - Chaque plan est appelé **programme**.
- Il a trouvé que:
  - Plusieurs programmes sont des LP.



Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!
- Il as servi dans la deuxième guerre mondiale dans la **planification** des routes.
  - Chaque plan est appelé **programme**.
- Il a trouvé que:
  - Plusieurs programmes sont des LP.
  - Personne ne peut systématiquement résoudre un LP de large échelle.

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!
- Il as servi dans la deuxième guerre mondiale dans la **planification** des routes.
  - Chaque plan est appelé **programme**.
- Il a trouvé que:
  - Plusieurs programmes sont des LP.
  - Personne ne peut systématiquement résoudre un LP de large échelle.
- Il a invente la méthode de **Simplexe**

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!
- Il as servi dans la deuxième guerre mondiale dans la **planification** des routes.
  - Chaque plan est appelé **programme**.
- Il a trouvé que:
  - Plusieurs programmes sont des LP.
  - Personne ne peut systématiquement résoudre un LP de large échelle.
- Il a invente la méthode de **Simplexe**
  - Première solution **effective** d'un problème LP.

Plusieurs modèles en RO, s'écrivent en forme de **programme linéaire**:

- George Dantzig (1914-2005)
  - Doctorat en Statistiques, Université California Berkeley (1946).
  - Résolution de deux problèmes difficiles qu'il as pris pour des homework!!
- Il as servi dans la deuxième guerre mondiale dans la **planification** des routes.
  - Chaque plan est appelé **programme**.
- Il a trouvé que:
  - Plusieurs programmes sont des LP.
  - Personne ne peut systématiquement résoudre un LP de large échelle.
- Il a invente la méthode de **Simplexe**
  - Première solution **effective** d'un problème LP.
  - Toujours une composante **principale** dans les logiciels Commerciaux.



- Nombre de personnel requis dans un aéroport varie selon l'heure.

0-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-22	22-24
6	10	15	20	16	24	28	20	10



- Nombre de personnel requis dans un aéroport varie selon l'heure.

0-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-22	22-24
6	10	15	20	16	24	28	20	10

- Combien d'employés il vous faut?



- Nombre de personnel requis dans un aéroport varie selon l'heure.

0-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-22	22-24
6	10	15	20	16	24	28	20	10

- Combien d'employées il vous faut?
  - Chaque employée travaille dans **8** heures **continue**.



- Nombre de personnel requis dans un aéroport varie selon l'heure.

0-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-22	22-24
6	10	15	20	16	24	28	20	10

- Combien d'employées il vous faut?
  - Chaque employée travaille dans **8** heures **continue**.
  - Il peuvent commencer leurs shift a différent tempes.





- Nombre de personnel requis dans un aéroport varie selon l'heure.

0-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-22	22-24
6	10	15	20	16	24	28	20	10

- Combien d'employées il vous faut?
  - Chaque employée travaille dans **8 heures continue**.
  - Il peuvent commencer leurs shift a différent tempes.
- Programmation linéaire est utilisée par *United Airlines* pour réduire le nombre de **délat** par **50%** et elle as économise plus de **\$5 million** par année en 1992.

- La programmation Linéaire est en utilisation large dans les **gouvernements**, **Économie**.

---

<sup>2</sup>Gass, S.I. and Assa, A.A. (2005). An Annotated Timelien of Operations Research. An Informal History. Bosen, MA: Springer

- La programmation Linéaire est en utilisation large dans les **gouvernements**, **Économie**.
- Deux Académiques, **Leonid Kantorovich** et **Tjalling Koopmans** ont gagné le prix **Nobel** en **1975**.

---

<sup>2</sup>Gass, S.I. and Assa, A.A. (2005). An Annotated Timelien of Operations Research. An Informal History. Bosen, MA: Springer

- La programmation Linéaire est en utilisation large dans les **gouvernements**, **Économie**.
- Deux Académiques, **Leonid Kantorovich** et **Tjalling Koopmans** ont gagné le prix **Nobel** en **1975**.
  - Pour leur contribution dans la théorie d'**Allocation optimale des ressources**.

---

<sup>2</sup>Gass, S.I. and Assa, A.A. (2005). An Annotated Timelien of Operations Research. An Informal History. Boston, MA: Springer

- La programmation Linéaire est en utilisation large dans les **gouvernements**, **Économie**.
- Deux Académiques, **Leonid Kantorovich** et **Tjalling Koopmans** ont gagné le prix **Nobel** en **1975**.
  - Pour leur contribution dans la théorie d'**Allocation optimale des ressources**.
- Quand est-il de Dantzig?

---

<sup>2</sup>Gass, S.I. and Assa, A.A. (2005). An Annotated Timelien of Operations Research. An Informal History. Boston, MA: Springer

- La programmation Linéaire est en utilisation large dans les **gouvernements**, **Économie**.
- Deux Académiques, **Leonid Kantorovich** et **Tjalling Koopmans** ont gagné le prix **Nobel** en **1975**.
  - Pour leur contribution dans la théorie d'**Allocation optimale des ressources**.
- Quand est-il de Dantzig?
- On sait au moins qu'ils ont pris une photo ensemble.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Gass, S.I. and Assa, A.A. (2005). An Annotated Timelien of Operations Research. An Informal History. Boston, MA: Springer

Table: Plan proposé du cours.

Semaines	Chapitre	Pratique <sup>3</sup>
1	Introduction	
3	Théorie basique de graphes	V
3	Programmation Linéaire	V
2	Programmation non Linéaire	V
2	Ordonnement simple	V
2	Aspect algorithmique des graphes	V
1	Algorithmes sélectionnées	V

<sup>3</sup>Travaux pratiques en Python et Gurobi